Magnetohydrodynamika

Krzysztof Borek*

25 maja 2010

Streszczenie

Magnetohydrodynamika (MHD) jest ciekawym zagadnieniem,złożonym pod względem matematycznym i fizycznym, jednak jeszcze nie do końca wyklarowanym i jasnym. Praca przybliża zagadnienia związane z tą niezwykłą dziedziną, która jest połączeniem hydrodynamiki i elektromagnetyzmu, opisuje w krótki sposób relacje pomiędzy działami. Następnie zamieszczone są bezpośrednie konsekwencje wynikające z równań MHD, tj. ciśnienie magnetyczne i w mrożenie pola w ośrodek. Później zwrócona jest uwaga na dalszą konsekwencje równań MHD, mianowicie fale Alfvéna. Na koniec przybliżona została idea szeroko stosowanego w astronomii dynama magnetycznego.

*E-mail: borek-krzysztof@o2.pl

Spis treści

1 Wstęp 3

2 Równania magnetohydrodynamiki 3

3 Konsekwencje wynikające wprost z równań MHD 7
- 3.1 Magnetyczna liczba Reynoldsa 7
- 3.2 Ciśnienie magnetyczne 8
- 3.3 Pole wmrożone w ośrodek 8
- 3.4 Fale Alfvéna 9

4 Dynamo 10
- 4.1 Homopolarne dynamo 10
- 4.2 Model dynamo $\alpha - \Omega$ 11

5 Podsumowanie 13

1 Wstęp

Magnetohydrodynamika jest relatywnie młodą dziedziną nauki, jednak prężnie się rozwijającą i udoskonalaną,tym samym bardzo potrzebą oraz wykorzystywaną do wyjaśniania wielu zagadnień. Chcąc zrozumieć istotę tej dziedziny należy posiadać pewną wiedzę z działów, z których ona się wywodzi.

Ujednolicenie praw elektromagnetyzmu i hydrodynamiki zwraca szczególną uwagę na czwarty stan skupienia, czyli plazmę, która jest gazem o wysokim stopniu jonizacji i charakteryzuje się dobrym przewodzeniem.MHD jest właściwym narzędziem do opisywania tej struktury, a biorąc pod uwagę jej powszechność należy zdać sobie sprawę jak bardzo jest istotna dla współczesnej nauki.

W pracy rozważane są przypadki często spotykane oraz chętnie stosowane w astronomii:

1. Równanie stanu gazu doskonałego. Gęstość i ciśnienie gazu we wnętrzu gwiazd takich jak Słońce jest bardzo duże, ale nie powoduje to degeneracji materii. Zachowuje się ona jak gaz doskonały, tym samym reakcje termojądrowe bardzo silnie zależą od temperatury gazu. Dodatkowo plazma bezzderzeniowa bardzo chętnie jest opisywana tym równaniem stanu.

2. Politropowe równanie stanu. Dużą liczbę typów gwiazd można z zadowalającą dokładnością przybliżyć równaniem politropy (samo grawitujące sfery o takim równaniu stanu), zarówno te bardzo masywne, jak i mało masywne gwiazdy ciągu głównego oraz gwiazdy przed ciągiem głównym oraz w prawie całej rozpiętości mas białe karły. Co więcej, jądra konwektywne lub też otoczki konwektywne gwiazd mogą również być opisane jako częściowe politropy. Z historycznego punktu widzenia, politropy były bardzo ważne dla rozwoju teorii struktury gwiazd.

2 Równania magnetohydrodynamiki

Ruch cieczy jest opisywany przez znane równania hydrodynamiki, które reprezentują zachowanie praw mechaniki. Ruch materii określa równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy, a $\mathbf{v}$ prędkością. To wyrażenie porównuje tempo wzrostu ilości materii w elemencie objętości płynu $\partial\rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho = (D\rho/Dt)$ do tempa przepływu materii przez ten element $-\rho\nabla \cdot \mathbf{v}$. Zachowanie pędu $D(\rho\mathbf{v})/Dt = 0$ jest opisane przez

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mathbf{F}, \tag{2}$$

które porównuje tempo wzrostu pędu w elemencie cieczy do sił przeciwdziałających. **F** reprezentuje siły zewnętrzne, p ciśnienie, oba można zapisać ogólniej jako tensor naprężeń. Te równanie wnosi coś wartościowego tylko dla niezerującego się ciśnienia lub tensora naprężeń, można stwierdzić, że określa wtedy właściwości fizyczne cieczy. Niezbędna relacja między ciśnieniem i parametrami przepływu jest zwykle wyznaczana eksperymentalnie, jednak gdy nie można się takowymi posłużyć, czasami trzeba się uciec do teorii cieczy - takich jak kinetyczna teoria gazu. W większości przypadków stosuje się najprostszą możliwą formę p, aby reprezentacja fizyki płynów była nieskomplikowana. Jeśli ściśliwość i lepkość można pominąć to niezależność gęstości od czynników ośrodka implikuje

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

relacje, dzięki której z równań (2) i (??) można wyeliminować ciśnienie.

$$\frac{D(\rho\mathbf{v})}{Dt} = \mathbf{v}\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho(-\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v}) + \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right)$$

$$\rho\mathbf{v}\nabla\cdot\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}$$

Jeśli ciecz jest lepka, to poza hydrostatycznym ciśnieniem pojawi się wyrażenie związane z tensorem naprężeń

$$p_{ij} = \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\nu\nabla\cdot\mathbf{v}\delta_{ij}, \tag{4}$$

gdzie ν jest współczynnikiem lepkości. Jeżeli ciecz jest ściśliwa, zazwyczaj można założyć lokalną równowagę termodynamiczną i wyliczyć ciśnienie z równania stanu, $\phi(p,\rho,T) = 0$, na przykład dla gazu doskonałego $p-R\rho T = 0$. Często warunki zdarzają się takie, że zmienna termodynamiczna, temperatura lub częściej entropia, jest stała i redukuje równanie stanu, tak iż można wyliczyć bezpośrednio ciśnienie i gęstość. Na przykład takie wyrażenie stanu dla adiabatycznego przepływu gazu doskonałego

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \tag{5}$$

gdzie $\gamma(> 1)$ jest indeksem politropy lub iloczynem odpowiednich ciepeł.

Jeśli nie ma możliwości takiej redukcji, trzeba użyć pełnej postaci równania stanu i równania hydrodynamicznego z dołączonym wyrażeniem determinującym transport całkowitej energii, takie jak

$$C_v \frac{DT}{Dt} + p\nabla \cdot \mathbf{v} + K\nabla^2 T = 0 \tag{6}$$

równanie transportu energii dla gazu doskonałego, gdzie C_v jest odpowiednim ciepłem właściwym, a K przewodniością cieplną.

Przejście do magnetohydrodynamiki jest możliwe dzięki włączeniu w $\mathbf{F}$ ciśnienia magnetycznego $(1/c)\mathbf{j}\times\mathbf{B}$, wtedy używając równań Maxwella można zdeterminować pola. Następnie należałoby powiązać gęstość prądu z polami i ruchem cieczy. W układzie poruszającym się wraz z płynem wartość pola elektrycznego wynosi $\mathbf{E}^*$ dane przez równanie (7), stąd prawo Ohma $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^*$ przybiera w tym układzie postać (8).

$$\mathbf{E}^* = \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{7}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{8}$$

Użytecznym wariantem tego założenia jest nieskończona przewodniość

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

Dla wygody zbierzemy teraz wszystkie równania magnetohydrodynamiki w pierwszej formie oraz założymy, że prędkości są nieduże, aby zaniedbać przemieszczenia prądu. Mamy równania hydrodynamiczne $[D/Dt = (\partial/\partial t) + \mathbf{v} \cdot \nabla$, własność różniczki]

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{10}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{11}$$

równania Maxwella

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi q}{\epsilon} \tag{15}$$

i dwa „równania stanu" (w równaniu (17) i (20) dotyczy przypadku, gdy przewodniość σ jest nieskończona

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{16}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \qquad \text{lub} \qquad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \tag{17}$$

Chcąc uprościć powyższe równania, należałoby je przekształcić, aby móc wyeliminować **E** i **j**, zostawiając ρ, **v** i **B** jako zmienne. Aby to zrobić należy najpierw użyć (12) do wyeliminowania prądu z (11)

$$\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{8\pi\mu}\nabla\mathbf{B}^2 + \frac{1}{4\pi\mu}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Następnie weźmy rotację z (12), użyjmy prądu **j** z (17) i (21) aby wyeliminować rotację pola elektrycznego, tj.

$$\nabla \times \left[\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\right] = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left[c\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] =$$

$$-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right]$$

Teraz możemy zapisać drugą formę równań magnetohydrodynamiki

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{18}$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \frac{1}{8\pi\mu}\nabla B^2 + \frac{1}{4\pi\mu}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{19}$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} + \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\nabla^2\mathbf{B} \qquad \text{lub} \qquad = 0 \tag{20}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{23}$$

3 Konsekwencje wynikające wprost z równań MHD

3.1 Magnetyczna liczba Reynoldsa

Załóżmy typowe zjawisko w MHD, gdzie prędkość płynu i pole magnetyczne są głównymi źródłami oddziaływań, zatem w (19) wektor indukcji magnetycznej powinien być porównywalny do przyspieszenia, które byłoby determinowane przez działające pola. Tym samym po prawej stronie równania (20) wyrażenie, które reprezentuje dyfuzję pola, powinno być zaniedbywane w porównaniu z konwektywnym członem po lewej stronie równania reprezentującego tempo transportu strumienia przez ruch płynu. Dla laminarnego przepływu wymagane jest, aby:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{V^2}{l} \simeq \frac{B^2}{8\pi l} \qquad \text{lub} \qquad v \simeq V_A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}}. \tag{24}$$

V_A - prędkość Alfvéna[1], l - długość charakteryzująca skalę.

Następnie, aby konwekcja strumienia dominowała nad dyfuzją:

$$v\frac{B}{l} \gg \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\frac{B}{l^2} \qquad \text{zatem} \qquad v \gg \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma l}. \tag{25}$$

Dzięki tym warunkom wziętym łącznie, można zdefiniować charakterystyczną bezwymiarową wielkość magnetyczną liczbę Reynoldsa (MLR):

$$M = \frac{\mu\sigma}{c^2}lB\sqrt{\frac{4\pi}{\rho}}. \tag{26}$$

Obliczając MLR można stwierdzić, czy należy zastosować równania MHD, czy można jednak posłużyć się prostszymi równaniami (np. MLR jest miernikiem wmrożenia pola[2] w ośrodek).

Chcąc uzmysłowić sobie o wielkościach jakie przyjmuje MLR można posłużyć się tabelką (3.1)

Ośrodek	l [cm]	B [G]	ρ [g/cm^3]	σ [s^{-1}	M
Jądro Ziemi	10^8	1	10	10^{15}	10^2
Jonosfera	10^7	10^{-1}	10^{-8}	10^{11}	10
Atmosfera Słońca	10^9	10^2	10^{-9}	10^{13}	10^8
Korona słoneczna	10^{11}	10^{-5}	10^{-20}	10^{16}	10^{11}
Gorący gaz mgławicowy	10^{17}	10^{-5}	10^{-22}	10^{13}	10^{14}
Gorący gaz międzygwiazdowy	10^{18}	10^{-6}	10^{-24}	10^{13}	10^{15}

[1]pojęcie to zostało omówione w podrozdziale Fale Alfvéna

[2]zagadnienie będzie omówione z dalszej części

3.2 Ciśnienie magnetyczne

Jeszcze nie w pełni jest jasne co dokładnie wynika z równań MHD, ale niektóre zjawiska są z miejsca oczywiste. Na przykład rozważmy wyrażenie 19 dla ruchu prostopadłego do nie ukierunkowanego pola magnetycznego. Składowa napięcia magnetycznego redukuje się do $(1/8\pi\mu)\nabla B^2$, gradientu ciśnienia magnetycznego. Wagę tego sformułowania można oszacować polem o 5000 Gaussach

$$\frac{1}{8\pi}(5000)^2 \simeq 10^6[\mathrm{dyn/cm^2}] \simeq 1[\mathrm{atm.}]$$

W bardziej ogólnej geometrii, tensor napięć Maxwella jest zespolony, ale przez przedstawienie jednostkowego wektora $\hat{\mathbf{b}}$ w kierunku wektora $\mathbf{B}$ składową można uprościć do $-[\nabla - \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)](B^2/8\pi) + (\mathbf{n}/R)(B^2/4\pi)$, zatem żadna siła nie jest wywierana w kierunku linii pola, podczas gdy w kierunku $\mathbf{n}$ normalnej, gradient z $(B^2/8\pi)$ jest redukowany o $(B^2/4\pi R)$, gdzie R stanowi promień krzywizny linii pola.

3.3 Pole wmrożone w ośrodek

W przypadku nieskończonej przewodniości równanie (20) implikuje uwięzienie strumienia cieczy, czyli strumień natężenia zamkniętych linii pola jest stały.

Najłatwiej tego dowieść przez równowagę pomiędzy równaniem transportu wirowości w lepkim płynie i przywołać twierdzenie o cyrkulacji Kelvina[3] łatwo można to pokazać bezpośrednim rachunkiem w kartezjańskim układzie współrzędnych. Rozpatrując strumień przenikający element powierzchni dA tak, aby osie były równoległe do $\mathbf{B}$. Wtedy strumień przenikający przez dA dany jest zależnością

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = B\Delta x \Delta y \tag{27}$$

Od kiedy powierzchnia dzieli ruch cieczy

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = \frac{d}{dt}(x + \Delta x - x) = V_x(x + \Delta x) - V_x(x) = \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x \tag{28}$$

[3]Twierdzenie Kelvina - W nielepkiej i barotropowej cieczy cyrkulacja Γ wokół zamkniętej krzywej C porusza się z płynem pozostając stała w czasie

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Cyrkulacja zdefiniowana jest następująco $\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{dl} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{dS}$.

oraz

$$\frac{d}{dt}(\Delta x \Delta y) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \tag{29}$$

W związku z tym tempo zmiany elementu strumienia wynosi

$$\frac{D}{Dt}(d\phi) = \frac{DB}{Dt}\Delta x \Delta y + B\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

$$= \left[\frac{D\mathbf{B}}{Dt} + \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right]_z \Delta x \Delta y = 0 \qquad \text{porównaj z (20)}$$

Fizyczny powód uwięzienia strumienia jest również jasny. Odkąd ciecz jest doskonałym przewodnikiem, wszystkie pola elektryczne w płynie muszą znikać kiedy są mierzone przez obserwatora poruszającego się wraz z cieczą. Łatwo wysnuć wniosek, że w warunkach wmrożenia pola, gdy ośrodek zostanie skompresowany, wzmocnione będzie również pole magnetyczne. Jest to jeden ze sposobów amplifikacji pola w ośrodku.

3.4 Fale Alfvéna

Nieściśliwa ciecz nie będzie propagować oscylacji, fale podłużne potrzebują kompresji, a fale poprzeczne które wymagają wirowości w ośrodku są wykluczone przez twierdzenie Kelvina. W przepływie magnetohydrodynamicznym nie obowiązuje twierdzenie Kelvina i poprzeczne fale mogą się propagować. Niezwykłym wydarzeniem było odkrycie Hannes'a Alfvéna tych oscylacji, które jako jedno z pierwszych fenomenów magnetohydrodynamiki zostały zrozumiane. Fale Alfvéna mogą być analizowane następująco. Rozważmy jednolitą, nieściśliwą, doskonale przewodzącą ciecz w spoczynku i jednorodne pole magnetyczne $\mathbf{B}$, na początek zaburzmy ośrodek wprowadzając małą prędkością $\mathbf{v}$ i niewielkim polem magnetycznym $\mathbf{B}'$. Liniowe równania ruchu są następujące

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0 \tag{31}$$

Perturbacja pola magnetycznego da się wyeliminować zostawiają postać

$$\rho\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\nabla\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times ((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v})) \times \mathbf{B} \tag{32}$$

oraz eliminujemy ciśnienie biorąc rotację, otrzymując tym samym

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{B}\cdot\nabla)^2\Psi, \tag{33}$$

gdzie Ψ to fala Alfvéna, jest falą płaską $\Psi \sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Wstawiając do równania (33), prędkość fazowa $V = \omega/k = V_A\cos\theta$, przy czym $\cos\theta$ jest kątem między $\mathbf{k}$ i $\mathbf{B}$, a $V_A = \sqrt{B^2/4\pi\rho}$ jest prędkością Alfvéna. Fale propagują się tylko wzdłuż pola magnetycznego i można przewidzieć płynne oscylacje wmrożonego pola, pole magnetyczne zapewnia sprężystość i płynność bezwładności.

4 Dynamo

Dynamo magnetyczne jest procesem polegającym na zachowaniu ruchu materii w polu magnetycznym. W ten sposób indukowany zostaje prąd wzmocnienia, które powoduje amplifikacje pola pierwotnego.

Przez lata standardowy model dynama znany jako $\alpha - \Omega$ został wyklarowany. W skrócie chodzi w nim o to, że ruch turbulentny w ośrodku międzygwiazdowym, napędzanym przez np. wiatr gwiazdowy, wybuchy supernowych czy niestabilności hydromagnetyczne, wyciąga toroidalne pole magnetyczne z płaszczyzny dysku. Efekt Coriolisa powoduje, przez rotację różnicową, rekoneksje linii pola i regeneruje pole poloidalne.

4.1 Homopolarne dynamo

Można prosto skonstrułować unipolarne (jednobiegunowe lub homopolarne) dynamo, odkryte przez Faradaya. Fenomen zawiera pojawienie się siły elektromotorycznej (SEM) w zamkniętym obwodzie, który wykorzystuje poruszający i stacjonarny przewodnik w polu magnetycznym. Pole elektryczne w układzie poruszającym się znika w rotującym przewodniku, ale w przewodniku stacjonarnym wytwarza prąd $-v \times H/c$, gdzie v jest prędkością rotacji. Zatem siła elektromotoryczna jest wytwarzana dzięki różnicom w prędkości kątowej. Elsasser (1946) jako pierwszy zauważył, że to zjawisko może mieć wpływ na pole magnetyczne Ziemi oraz gwiazd rotujących różnicowo. W tych przypadkach ma się doczynienia z rotującą plazmą zamiast ze sztywnym przewodnikiem.

Aby łatwo zaadaptować to zjawisko, można posłużyć się rotującym przewodzącym dyskiem, stacjonarnym przewodnikiem o oporności R i indukcyjności L zwiniętym w helise i połączonym z brzegiem dysku oraz jego osią przez np. szczoteczki. Taki układ nie wymaga stałego pola magnetycznego, wystarczy tylko inicjujące.

Dla pomijalnej indukcyjności dysku, można zapisać równanie:

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} + IR = \xi, \tag{34}$$

gdzie ξ jest siłą elektromotoryczną, dodatkowo:

$$\xi = \frac{1}{c}\int \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\omega \cdot \int_0^a \mathbf{H} r dr,$$

przy czym a to promień dysku. Pole magnetyczne determinuje homopolarną SEM i generuje prąd w przewodzie o kształcie helisy. W myśl prawa Biota-Savarta:

$$\omega \cdot \mathbf{H} = \frac{I}{c}\int \omega \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) r^{-3} = \frac{I}{c}\int r^{-3}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Znak SEM zależy od kierunku kręcenia się dysku i kierunku skręcenia spirali. Wygodnie jest wyrazić SEM w przez wzajemną indukcyjność dwóch konturów, spirali i brzegu dysku $\xi = M\omega I/2\pi c^2$. W takim przypadku można rozwiązać równanie (34):

$$I = I_0 \exp \gamma t,$$
$$\gamma = \frac{\omega M}{L}(\pm\frac{1}{2}\frac{1}{\pi} - \frac{c^2 R}{M\omega}).$$

Zatem, kiedy przewód jest skręcony w tym samym kierunku co rotacja i $M\omega/c^2 R > 2\pi$, prąd oraz pole magnetyczne, a także strumień przechodzący przez płaszczyznę dysku będzie rósł eksponencjalnie. Oczywiście nie zależy to od zwrotu pierwotnego pola magnetycznego - dynamo jest samopobudzające się.

Oczywistym jest, że energia takiego układu nie może rosnąć w nieskończoność. Wzmocnienie pola magnetycznego powoduje reakcję zwrotną w prędkości kątowej. W przypadku, gdy dana jest prędkość (lub ω) zagadnienie nazywa się problem kinematyczny dynamo, gdy włącza się dodatkowo wpływ pola magnetycznego określane jest mianem problem dynamiczny dynamo.

4.2 Model dynamo $\alpha - \Omega$

Wiadomo, że pole magnetyczne będzie zanikać, chyba że jest regenerowane lub ośrodek ulega kolapsowi, którego tempo zrównoważyłoby tempo utraty pola, jednakże bez stałego mechanizmu dynamo dyssypacja jest nieunikniona. Dzięki wysokiej przewodniości plazmy w ośrodkach zapadających się lub skompresowanych (np. falą uderzeniową) oraz z rotacji generowane są sile siły lorentzowskie. Nie działa to jednak przez nieskończony okres czasu. Twierdzenie Cowling'a (antydynamo) mówi, że niestacjonarne (niezależna od czasu) osiowosymetryczne dynamo jest możliwe, ale tylko w sytuacji łamania symetrii sferycznej.

Symetria jest dalej łamana i rotacja wpływa na poloidalną składową pola dzięki wspólnemu działaniu cyrkulacji oraz turbulencji. Początkowe pole osiowosymetryczne jest ścinane przez rotację różnicową. Jeśli początkowo występowało pole cylindryczne lub poloidalne, przekształci się ono w azymutale. W wyniku pola poloidalnego potencjał jest toroidalny, a w przypadku toroidalnego pola magnetycznego potencjał jest poloidalny. Ostatecznie, aby przekształcić pole toroidalne z powrotem do toroidalnego potencjału, wymagane są kolejne łamania symetrii. Turbulencje w rotującym ośrodku mają wirowość, która jest prostopadła do lokalnego wektora prędkości, nieradialna, ani nawet półkoliście symetryczna. W elektrycznie przewodzącej cieczy prężnie powstające komórki turbulencji sprawiają przekształcenie helikalnych pętli w toroidalne oraz indukują poloidalną komponentę pola. To jest podstawa modelu dynamo $\alpha - \mathbf{\Omega}$. Siła elektromotoryczna wyraża się $\xi = \alpha\mathbf{B}$, gdzie α jest związana z funkcją korelacji prędkości i mierzy amplitudę prędkości fluktuacji w cieczy. We fluktuującym ośrodku, prędkość przyjmuje wartość średnią $\mathbf{V}$ oraz komponentę fluktuującą $\mathbf{u}$, której średnia wartość znika, ale $< u^2 >$ jest różna od zera (przy czym nawiasy ostrokątne $< \cdots >$ oznaczają średnia po turbulentnym widmie wirów w cieczy). Ewolucja pola magnetycznego teraz zależy od średniej wartości $\mathbf{B}$ i fluktuującej komponenty $\mathbf{b}$. W tej sytuacji równanie dynamo ma postać

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \nabla \times \xi + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{35}$$

gdzie $\xi =< \mathbf{u} \times \mathbf{b} = \alpha\mathbf{B} >$. Zatem α reprezentuje fluktuacje w cieczy oraz opisuje sposób w jaki oddziaływuje na natężenie pola magnetycznego. Ewolucja komponenty fluktuującej opisywana jest w następujący sposób

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{V} \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b} - \xi) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{36}$$

Zatem fluktuacje rządzi mało skalowymi strukturami, a rotacja różnicowa reguluje wielkoskalowe struktury podporządkowane polu i prowadzi do łamania symetrii, co jest konieczne do generowania dipolu. Tym samym grawitacja i ścinanie prowadzi do turbulencji, podczas gdy rotacja zapewnia konieczną helikalność.

5 Podsumowanie

Magnetohydrodynamika bardzo dobrze spełnia swoje zadanie jako narzędzie do opisu ośrodków ciągłych o danej przewodności. Wyjaśnia wiele zagadnień oraz problemów fizycznych jak i astronomicznych. Pomaga także znaleźć odpowiedź na wiele pytań, które zadają sobie współcześni naukowcy. W jasny sposób wyjaśnia efekt dynama, który jest bezpośrednio związany z w mrożeniem pola w ośrodek jak i wiele innych zjawisk związanych z polem magnetycznym galaktyk i nie tylko. Choć nie wszystko jest jeszcze oczywiste, MHD jest fenomenem na skalę fizyki gwiazd jak i całych gromad galaktyk.

Literatura

[1] W. B. Thompson An introduction to plasma physics Oxford : Pergamon Press, 1962.

[2] N. C. Little Magnetohydrodynamika Warszawa : Państ. Wydaw. Naukowe, 1970.

[3] L. M. Widrow Origin of galactic and extragalactic magnetic fields Reviews of modern physics, volume 74 (2002)

[4] S. N. Shore The tapestry of modern astrophysics Hoboken : Wiley-Interscience, cop. 2003.

[5] A. A. Ruzmaikin, A. M. Shukurov, and D. D. Sokoloff Magnetic fields of galaxies Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic Publishers, cop. 1988.

[6] J. D. Jackson Classical electrodynamics New York ; London : John Wiley & Sons, 1962.

[7] L. Landau, E. Lifszic Elektrodynamika ośrodków ciągłych Warszawa : Państw. Wydaw. Naukowe, 1960.

[8] B. Paczyński Wykłady z astrofizyki: Budowa i Ewolucja Gwiazd http://postepy.camk.edu.pl/bieg.html