Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 8
14.12.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Lokalna stabilność dysku**.

a) Przyjmij, że Σ_0 =const w równaniach (29-31) z zestawu 7. Następnie przekształć te równania do postaci

$$0 = i(m\Omega-\omega)\Sigma_a + \Sigma_0\frac{dv_{ra}}{dr} + \frac{\Sigma_0}{r}v_{ra} + \frac{im\Sigma_0}{r}v_{\phi a}, \tag{1}$$

$$v_{ra} = -\frac{i}{\Delta}\left(\frac{v_s^2}{\Sigma_0} - \frac{2\pi G}{|k|}\right)\left[\frac{2\Omega m}{r}\Sigma_a + (m\Omega-\omega)\frac{d\Sigma_a}{dr}\right], \tag{2}$$

$$v_{\phi a} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{v_s^2}{\Sigma_0} - \frac{2\pi G}{|k|}\right)\left[\frac{m(m\Omega-\omega)}{r}\Sigma_a + \frac{\kappa^2}{2\Omega}\frac{d\Sigma_a}{dr}\right], \tag{3}$$

gdzie zdefniowano

$$\Delta \equiv \kappa^2 - (m\Omega-\omega)^2. \tag{4}$$

Czemu odpowiada przypadek $\Delta = 0$? Przy interpretacji wkorzystaj fakt, że $\Omega_p = \omega/m$.

b) Rozwiązaniem równania (28) z zestawu 7 jest $W(r) = C_1 J_m(kr) + C_2 Y_m(kr)$. Przymij, że $C_2 = iC_1$. Na tej podstawie pokaż, że

$$\Sigma_a \propto \frac{1}{\sqrt{r}}e^{ikr} \tag{5}$$

dla $|kr| \gg 1$. Wykorzystaj tu asymptotyczną postać funkcji Bessela dla $|x| \gg 1$:

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{6}$$

$$Y_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{7}$$

Zinterpretuj warunek $|kr| \gg 1$. Pokaż, że dla $|kr| \gg 1$, mamy

$$\frac{d\Sigma_a}{dr} \approx ik\Sigma_a. \tag{8}$$

c) Wykorzystując powyższy rezultat pokaż, że dla $|kr| \gg 1$ możemy zapisać

$$v_{ra} \approx \frac{k}{\Delta}\left(\frac{v_s^2}{\Sigma_0} - \frac{2\pi G}{|k|}\right)(m\Omega-\omega)\Sigma_a, \tag{9}$$

$$v_{\phi a} \approx \frac{ik}{\Delta}\left(\frac{v_s^2}{\Sigma_0} - \frac{2\pi G}{|k|}\right)\frac{\kappa^2}{2\Omega}\Sigma_a. \tag{10}$$

Podstawiając to do równania ciagłości (1) pokaż, że dla $|kr| \gg 1$ możemy je zapisać jako

$$\Sigma_a\left[1 + \left(\frac{v_s^2}{\Sigma_0} - \frac{2\pi G}{|k|}\right)\frac{k^2\Sigma_0}{\Delta}\right] = 0. \tag{11}$$

Ne tej podstawie wyprowadź relację dyspersji dla dysku gazowego:

$$(m\Omega-\omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + k^2 v_s^2. \tag{12}$$

2. **Parametr Toomre'a**. Rozważ osiowosymetryczne ($m = 0$) zaburzenie dysku gazowego. Zbadaj lokalną stabilność dysku w zależności od wartości parametru

$$Q \equiv \frac{v_s\kappa}{\pi G\Sigma_0} \tag{13}$$

zwanego parametrem Toomre'a. W pobliżu Słońca mamy $\Sigma_0 \simeq 75\mathrm{M}_\odot\ \mathrm{pc}^{-2}$ oraz $\kappa \simeq 36\mathrm{km\ s}^{-1}\ \mathrm{kpc}^{-1}$. Przyjmij ponadto, że $v_s \approx \sigma_r \simeq 45\mathrm{km\ s}^{-1}$ (co uzasadnia taki wybór?). Na tej podstawie sprawdź czy dysk Galaktyki w pobliżu Słońca jest stabilny.

Jakub Mielczarek