Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 7
7.12.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Spiralne fale gęstości** mogą tłumaczyć strukturę spiralną w galaktykach. W podejsciu tym, obserwowana struktura spiralna jest wynikiem rozchodzenia się zaburzeń gęstości w dysku galaktycznym. Model ten został zaproponowany przez C.C. Lin oraz F. H. Shu w pracy "On the Spiral Structure of Disk Galaxies" Astrophysical Journal, vol. **140**, p.646 (1964). Punktem wyjścia przy wprowadzaniu fal gęstości są (tak jak w przypadku niestabilności Jeansa) równania

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla\Phi \quad \text{(równanie Eulera)}, && (1)\\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) &= 0, \quad \text{(równanie ciągłości)} && (2)\\
\nabla^2\Phi &= 4\pi G\rho \quad \text{(równanie Poissona)} && (3)
\end{aligned}$$

oraz równanie stanu $P = P(\rho)$.

a) Rozważ model nieskończenie cienkiego dysku (płaszczyzna $z = 0$). W dysku takim, gęstość można zapisać jako $\rho(r,\phi,z) = \Sigma(r,\phi)\delta(z)$, gdzie $\delta(z)$ jest deltą Diraca, a $\Sigma(r,\phi)$ jest gęstością powierzchniową zdefiniowaną jako

$$\Sigma(r,\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\rho(r,\phi,z). \qquad (4)$$

Ponieważ ruch jest ograniczony do płaszczyzny $z = 0$, to składowa prędkości $v_z = 0$. Ponadto definiujemy $\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} dzP$. Na tej podstawie pokaż, że równania (1,2,3) można w układzie cylindrycznym zapisać jako

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial \Pi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, && (5)\\
\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} &= -\frac{1}{r\Sigma}\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, && (6)\\
\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\Sigma v_\phi) &= 0, && (7)\\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 4\pi G\Sigma\delta(z). && (8)
\end{aligned}$$

b) Rozważ rozwinięcie perturbacyjne, powyższego układu równań, w postaci

$$\begin{aligned}
\Sigma(r,\phi,t) &= \Sigma_0(r) + \epsilon\Sigma_1(r,\phi,t), && (9)\\
v_r(r,\phi,t) &= v_{r0}(r) + \epsilon v_{r1}(r,\phi,t), && (10)\\
v_\phi(r,\phi,t) &= v_{\phi 0}(r) + \epsilon v_{\phi 1}(r,\phi,t), && (11)\\
\Phi(r,\phi,z,t) &= \Phi_0(r,z) + \epsilon\Phi_1(r,\phi,z,t), && (12)
\end{aligned}$$

gdzie $\epsilon \ll 1$ jest parametrem rozwinięcia. Ponadto $v_{r0} = 0$ oraz $v_{\phi 0} = r\Omega(r)$. Przyjmij równanie stanu w postaci $\Pi = K\Sigma^\gamma$ gdzie K jest stałą. Pokaż, że równania zaburzeń można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{r1}}{\partial t} + \Omega\frac{\partial v_{r1}}{\partial \phi} - 2\Omega v_{\phi 1} &= -\frac{1}{\Sigma_0}\frac{\partial (v_s^2\Sigma_1)}{\partial r} + \frac{\Sigma_1 K}{\Sigma_0^2}\frac{d\Sigma_0^\gamma}{dr} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, && (13)\\
\frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}v_{r1} + \Omega\frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} &= -\frac{v_s^2}{r\Sigma_0}\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}, && (14)\\
\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma_0 v_{r1}) + \frac{\Sigma_0}{r}\frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} + \Omega\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \phi} &= 0, && (15)\\
\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} &= 4\pi G\Sigma_1\delta(z). && (16)
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano definicję częstości epicyklicznej (Zestaw 5)

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + r\frac{d\Omega^2}{dr}. \qquad (17)$$

oraz prędkości rozchodzenia się zaburzeń

$$v_s^2 = \left.\frac{d\Pi}{d\Sigma}\right|_{\Sigma=\Sigma_0} = \gamma K \Sigma_0^{\gamma-1}. \tag{18}$$

c) Rozwiązanie równań zaburzeń można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \Re\left[\Sigma_a(r)e^{i(m\phi-\omega t)}\right], && (19)\\
v_{r1} &= \Re\left[v_{ra}(r)e^{i(m\phi-\omega t)}\right], && (20)\\
v_{\phi 1} &= \Re\left[v_{\phi a}(r)e^{i(m\phi-\omega t)}\right], && (21)\\
\Phi_1 &= \Re\left[\Phi_a(r,z)e^{i(m\phi-\omega t)}\right], && (22)
\end{aligned}$$

gdzie parametr $m \in \mathbb{N}$ odpowiada ilości ramion spiralnych. Ponadto można zapisać $\omega = \omega_R + i\omega_I$, gdzie $\omega_R, \omega_I \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości ω_I, rozwiązania są niestabilne? Funkcję $\Sigma_a(r)$ możemy zapisać w postaci

$$\Sigma_a(r) = S(r)e^{i\Psi(r)}. \tag{23}$$

Na tej podstawie pokaż, że

$$\Sigma_1(r,\phi,t) = S(r)e^{\omega_I t}\cos\left(m\phi + \Psi(r) - \omega_R t\right). \tag{24}$$

Z jaką prędkością kątową obraca się otrzymana struktura spiralna? Jakiej sytuacji odpowiada warunek $\frac{d\Psi}{dr} < 0$, a jakiej $\frac{d\Psi}{dr} > 0$?

d) Pokaż, ze równanie Poissona przekształca się do postaci

$$\frac{\partial^2\Phi_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_a}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\Phi_a + \frac{\partial^2\Phi_a}{\partial z^2} = 4\pi G\Sigma_a\delta(z). \tag{25}$$

Funkcję potencjału można zapisać jako $\Phi_a(r,z) = W(r)e^{-|kz|}$. Wykonaj całkowanie równania (25) w postaci

$$\lim_{\xi\to 0}\int_{-\xi}^{\xi} dz \ldots \quad . \tag{26}$$

Na tej podstawie wyprowadź zależność

$$\Phi_a = -\frac{2\pi G}{|k|}\Sigma_a \quad \text{dla} \quad z = 0. \tag{27}$$

Pokaż, że $W(r)$ spełnia równanie Bessela

$$r^2\frac{d^2W}{dr^2} + r\frac{dW}{dr} + (k^2r^2 - m^2)W = 0, \tag{28}$$

którego rozwiązaniami są funkcje $J_m(kr)$ oraz $Y_m(kr)$.

e) Pokaż, że równanie ciągłości oraz równanie Eulera można zapisać w postaci układu równań

$$\begin{aligned}
i(m\Omega-\omega)\Sigma_a + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\Sigma_0 v_{ra}) + \frac{im\Sigma_0}{r}v_{\phi a} &= 0, && (29)\\
i(m\Omega-\omega)v_{ra} - 2\Omega v_{\phi a} &= -\frac{1}{\Sigma_0}\frac{d(v_s^2\Sigma_a)}{dr} + \frac{\Sigma_a K}{\Sigma_0^2}\frac{d\Sigma_0^\gamma}{dr} + \frac{2\pi G}{|k|}\frac{d\Sigma_a}{dr}, && (30)\\
i(m\Omega-\omega)v_{\phi a} + \frac{\kappa^2}{2\Omega}v_{ra} &= -\frac{v_s^2}{r\Sigma_0}im\Sigma_a + \frac{im}{r}\frac{2\pi G}{|k|}\Sigma_a. && (31)\\
& && (32)
\end{aligned}$$

Wykorzystaj tu wyprowadzoną zależonść (27).

Jakub Mielczarek