Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 6
23.10.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Niestabilność Jeansa**.

a) Pokaż, że przyjmując $\sigma_{ij}^2 = \delta_{ij}\sigma^2$, równanie Jeansa (Zestaw 2) przybiera postać równania Eulera

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi. \tag{1}$$

Przyjmij tu, że $\rho = m\nu$ oraz wykorzystaj równanie stanu gazu doskonałego $PV = NkT$. Następnie pokaż, że równanie ciągłości (Zestaw 1) możemy zapisać jako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2}$$

b) Równania (1) oraz (2) razem z równaniem Poissona

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{3}$$

oraz równaniem stanu $P = P(\rho)$ stanowią zamknięty układ równań. Rozważ zaburzenie rozkładu równowagowego w postaci

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x}) + \epsilon \rho_1(\mathbf{x}, t), & (4)\\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t), & (5)\\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon \Phi_1(\mathbf{x}, t), & (6) \end{aligned}$$

gdzie $\epsilon \ll 1$ jest parametrem rozwinięcia perturbacyjnego. Pokaż, że wyrazy rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$ można zapisać w postaci układu równań

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla(v_s^2 \rho_1)}{\rho_0} + \frac{\rho_1 \nabla P(\rho_0)}{\rho_0^2} - \nabla \Phi_1, && (7)\\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0, && (8)\\ \nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1, && (9) \end{aligned}$$

gdzie prędkość rozchodzenia się zaburzeń

$$v_s^2 \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_0}. \tag{10}$$

c) Przyjmij, że ρ_0 =const oraz $\mathbf{v}_0 = 0$ (uzasadnij ten wybór). Na tej podsawie wyprowadź równanie

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0. \tag{11}$$

d) Równanie (11), to równanie falowe. Przyjmij więc rozwiązanie w postaci

$$\rho_1(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} C(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)}. \tag{12}$$

Na tej podstawie, wyprowadź relację dyspersji

$$\omega_k^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \tag{13}$$

Zbadaj stabilność rozwiązań w zależności od długości fali $\lambda = 2\pi/k$.

e) Pokaż, że mody o długościach

$$\lambda \geq \lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi v_s^2}{G \rho_0}} \tag{14}$$

są niestabilne, gdzie λ_J to tzw. *długość Jeansa*. Na tej podstawie można zdefiniować tzw. *masę Jeansa*

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_0 \lambda_J^3. \tag{15}$$

Zinterpretuj tę wielkość. Jak zależy ona od temperatury gazu (wyznacz v_s w funkcji temperatury)?

Jakub Mielczarek