Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 5
29.11.2010, wtorek, godz. 16.00-17.30, Fort Góra

1. **Niestabilność Jeansa**. Pole prędkości $\mathbf{v}$ oraz gęstość ρ nielepkiej cieczy dane są przez rozwiązanie układu równań:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi, \quad \text{(równanie Naviera-Stokesa)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{(równanie ciągłości)} \tag{2}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad \text{(równanie Poissona)} \tag{3}$$

Równania te, wraz z równaniem stanu $P = P(\rho)$, stanowią zamknięty układ równań.

a) Rozważ zaburzenie rozkładu równowagowego w postaci:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \epsilon\rho_1(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t), \tag{5}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon\Phi_1(\mathbf{x}, t), \tag{6}$$

gdzie ϵ jest parametrem rozwinięcia perturbacyjnego ($\epsilon \ll 1$). Pokaż, że wyrazy rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$ można zapisać w postaci układu równań:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla(v_s^2\rho_1)}{\rho_0} + \frac{\rho_1 \nabla P(\rho_0)}{\rho_0^2} - \nabla\Phi_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0, \tag{8}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G\rho_1, \tag{9}$$

gdzie prędkość rozchodzenia się zaburzeń

$$v_s^2 \equiv \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0}. \tag{10}$$

b) Przyjmij, że ρ_0 =const oraz $\mathbf{v}_0 = 0$ (uzasadnij ten wybór). Na tej podsawie wyprowadź równanie

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G\rho_0\rho_1 = 0. \tag{11}$$

c) Równanie (11) jest równaniem falowym. Przyjmij więc rozwiązanie w postaci

$$\rho_1(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} C(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)}. \tag{12}$$

Na tej podstawie, wyprowadź relację dyspersji

$$\omega_k^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0. \tag{13}$$

Zbadaj stabilność rozwiązań w zależności od długości fali $\lambda = 2\pi/k$.

d) Pokaż, że mody o długościach

$$\lambda \geq \lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}} \tag{14}$$

są niestabilne, gdzie λ_J to tzw. *długość Jeansa*. Na tej podstawie można zdefiniować tzw. *masę Jeansa*

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3}\rho_0 \lambda_J^3. \tag{15}$$

Zinterpretuj tę wielkość. Jak zależy ona od temperatury gazu (wyznacz v_s w funkcji temperatury dla gazu doskonałego)?

e) Podczas epoki rekombinacji ($z \approx 1100$) temperatura gazu wypełniającego Wszechświat wynosiła $T \approx 3000K$, a jego gęstość $\rho_0 \approx 1.5 \cdot 10^{-19}$kg m^{-3}. Wyznacz długość Jeansa (w jednostkach pc) oraz masę Jeansa (w jednostkach $M_\odot$) dla tego gazu. Czy powstałe, w wyniku niestabilności grawitacyjnej, obiekty są gwiazdami czy galaktykami? Oszacuj czas formowania się tych obiektów. Wykorzystaj grawitacyjną skalę czasową $t_G \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho G}}$, uzasadnij tę definicję.

f) Wykorzystując intuicję fizyczną, zaproponuj dwa inne sposoby uzyskania wyrażenia na długość Jeansa.

Jakub Mielczarek