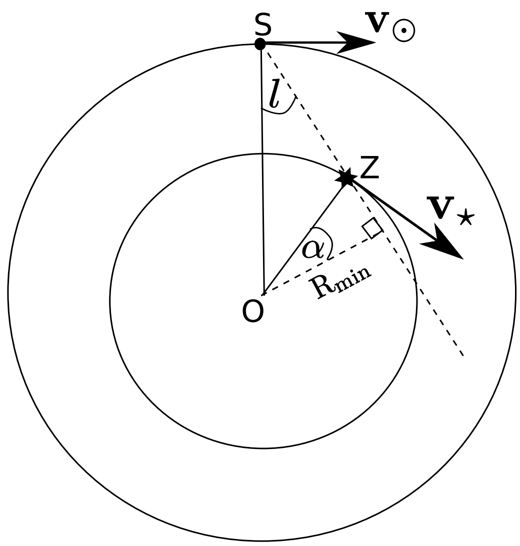
Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 5
16.11.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Stałe Oorta**. Rozważ ruch gwiazd po orbitach kołowych w płaszczyźnie Galaktyki. Słońce S porusza się z prędkością $v_\odot$, a obserwowana gwiazda Z z prędkością $v_\star$. Gwiazdę Z obserwujemy na długości galaktycznej l. Ponadto oznaczamy: $|\mathrm{OZ}| = R$, $|\mathrm{OS}| = R_\odot$, $|\mathrm{SZ}| = r$ (zobacz rysunek poniżej).



a) Pokaż, że obserwowane z układu Słońca, prędkości radialne i transwersalne gwiazdy S wyrażają się jak

$$v_\mathrm{r} = R\Omega(R)\cos\alpha - R_\odot\Omega(R_\odot)\sin l = (\Omega(R) - \Omega(R_\odot))R_\odot \sin l, \tag{1}$$

$$v_\mathrm{t} = R\Omega(R)\sin\alpha - R_\odot\Omega(R_\odot)\cos l = (\Omega(R) - \Omega(R_\odot))R_\odot \cos l - \Omega(R)r, \tag{2}$$

gdzie Ω jest prędkością kątową.

b) Rozważ gwiazdy będące w pobliżu Słońca ($r/R_\odot \ll 1$). Możemy wtedy zapisać

$$\Omega(R) = \Omega(R_\odot) + \left.\frac{d\Omega}{dR}\right|_{R=R_\odot}(R - R_\odot) + \ldots. \tag{3}$$

Na tej podstawie pokaż, że

$$v_\mathrm{r} = Ar\sin(2l), \tag{4}$$

$$v_\mathrm{t} = Ar\cos(2l) + Br, \tag{5}$$

gdzie współczynniki A i B to tzw. stałe Oorta zdefiniowane jako

$$A \equiv -\frac{1}{2}R\left.\frac{d\Omega}{dR}\right|_{R=R_\odot} = 14.82 \pm 0.84\ \mathrm{km/(kpc\cdot s)}, \tag{6}$$

$$B \equiv -\left.\left(\frac{1}{2}R\frac{d\Omega}{dR} + \Omega\right)\right|_{R=R_\odot} = -12.37 \pm 0.64\ \mathrm{km/(kpc\cdot s)}. \tag{7}$$

c) W jaki sposób można obserwacyjnie wyznaczyć wartości stałych Oorta?

2. **Orbity epicykliczne**. Rozważ ruch gwiazd w potencjale osiowosymetrycznym o symetrii $z \to -z$.

a) Pokaż, że równania ruchu w tym potencjale można zapisać jako

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_\mathrm{eff}}{\partial R}, \tag{8}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_\mathrm{eff}}{\partial z}, \tag{9}$$

gdzie $\Phi_{\text{eff}} = \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2}$ oraz $L_z = R^2\dot{\phi} \equiv R^2\Omega$.

b) Pokaż, że dla orbity kołowej (odpowiada to minimum potencjału Φ_{eff}) spełnione jest

$$\Omega^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R}. \tag{10}$$

c) Rozważ małe zaburzenie orbity kołowej w postaci $R = R_g + x$ gdzie $x \ll R_g$, a R_g jest promieniem orbity kołowej. Pokaż, że możemy zapisać

$$\Phi_{\text{eff}}(R, z) = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2}\kappa^2 x^2 + \frac{1}{2}\nu^2 z^2 + \dots \tag{11}$$

gdzie

$$\kappa^2 = \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right|_{(R_g,0)} \quad \text{oraz } \nu^2 = \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right|_{(R_g,0)}. \tag{12}$$

Na tej podstawie, pokaż, że rozwiązaniami dla małych zaburzeń są

$$x(t) = X\cos(\kappa t + \psi) \tag{13}$$
$$z(t) = Z\cos(\nu t + \xi) \tag{14}$$

gdzie X, Z, ψ, ξ to stałe całkowania. Parametr κ to tzw. częstość oscylacji epicyklycznych.

d) Pokaż, że

$$\phi(t) = \underbrace{\phi_0 + \Omega_g t}_{=\phi_g} - \frac{2\Omega_g}{R_g\kappa} X \sin(\kappa t + \psi) \tag{15}$$

a stąd

$$y(t) = R_g(\phi - \phi_g) = Y\sin(\kappa t + \psi). \tag{16}$$

Czemu odpowiada zmienna y? Na tej podstawie wykaż, że

$$\left(\frac{x(t)}{X}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{Y}\right)^2 = 1. \tag{17}$$

Zinterpretuj ten wynik. Jaki jest związek pomiędzy X i Y?

e) Wyprowadź następującą tożsamość

$$\kappa^2 = \left.\left(4\Omega^2 + R\frac{\partial \Omega^2}{\partial R}\right)\right|_{R=R_g}. \tag{18}$$

Na tej podstawie pokaż, że częstość epicyklyczna musi być zawarta w przedziale określonym nierównością

$$\Omega_g \leq \kappa \leq 2\Omega_g. \tag{19}$$

Górna granica odpowida tu jednorodnemu rozkładowi masy $\rho =$const, a dolna granica orbicie keplerowskiej $M =$const. Naszkicuj kształty orbit epicyklicznych dla przypadku $\kappa = \Omega_g$ oraz $\kappa = 2\Omega_g$.

f) Pokaż, że spełniona jest zależność

$$\kappa^2 = -4B(A - B), \tag{20}$$

gdzie A i B są stałymi Oort. Na tej podstawie wyznacz częstość oscylacji epicyklicznych Słońca.

g) Pokaż, że w układzie rotującym z częstością

$$\Omega_p = \Omega_g - \frac{n}{m}\kappa \quad \text{gdzie} \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

orbity tworzą krzywe zamknięte. Dla przypadku $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (tzw. rezonans Lindbladа) częstość Ω_p jest prawie niezależna od promienia. Oznacza to, że jeżeli wprowadzimy rotujący z tą prędkością układ współrzędnych, to orbity gwiazd w tym obszarze galaktyki staną się krzywymi zamkniętymi. Jeżeli wytworzy się więc struktura spiralna, to będzie ona mogła trwać przez wiele obrotów. Cała struktura obracać się będzie z częstością Ω_p. Tego typu strukturę nazywamy kinematyczną falą gęstości.

Jakub Mielczarek