Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 4
08.11.2010, wtorek, godz. 16.00-17.30, Fort Góra

1. Ogniskowanie grawitacyjne na sferze izotermicznej. Podobnie jak w przypadku pryzmatu, promienie świetlne ulegają zakrzywieniu w polu grawitacyjnym. Kąt ugięcia promieni świetlnych wyraża się jako całka, po drodze fotonu, ze składowej prostopadłej gradientu potencjału grawitacyjnego Φ do ścieżki światła,

$$\vec{\hat{\alpha}}(d) = \frac{2}{c^2} \int dl \vec{\nabla}_{\perp} \Phi, \tag{1}$$

gdzie d jest parametrem zderzenia promieni świetlnych. Pokaż, że dla sfery izotermicznej $\Phi = -2\sigma^2 \ln r + C$. Na tej podstawie, wyznacz kąt ugięcia promieni świetlnych przechodzących poprzez rozkład masy w sferze izotermicznej. Podczas całkowania przyjmij, że droga fotonu może być przybliżona przez prostą. Wyznacz kąt ugięcia światła przechodzącego przez galaktykę eliptyczną dla której dyspersja prędkości $\sigma \approx 300$ km/s.

2. Profil NFW. Rozkład ciemnej materii dla stuktur od galaktyk po gromady galaktyk jest dobrze opisywany zależnością

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s}\left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \tag{2}$$

gdzie r_s i ρ_0 są parametrami. Rozkład ten nosi nazwę profilu NFW (Navarro-Frenk-White).

a) Pokaż, że funkacja masy oraz prędkość rotacji dla profilu NFW wyrażają się przez

$$M(r) = 4\pi\rho_0 r_s^3 \left[\ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) - \frac{\frac{r}{r_s}}{1 + \frac{r}{r_s}}\right] \quad \text{oraz} \quad v_{\rm c}^2(r) = 4\pi G \rho_0 r_s^2 \left[\frac{r_s}{r} \ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) - \frac{1}{1 + \frac{r}{r_s}}\right]. \tag{3}$$

b) Wyznacz potencjał grawitacyjny dla profilu NFW:

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_0 r_s^3 \frac{\ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right)}{r}. \tag{4}$$

3. Politropowy model halo ciemnej materii. Pole prędkości $\vec{v}$ oraz gęstość ρ nielepkiej cieczy dane są przez rozwiązanie układu równań:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi, \quad \text{(równanie Naviera-Stokesa)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad \text{(równanie ciągłości)} \tag{6}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad \text{(równanie Poissona)} \tag{7}$$

a) Przedyskutuj podobieństwo pomiędzy równaniem Jeansa a równaniem Naviera-Stokesa. Rozważ przypadek kiedy tensor dyspersji, w równaniu Jeansa, przyjmuje następującą postać

$$\sigma_{ij}^2 = \delta_{ij} \frac{P}{\rho}. \tag{8}$$

Na jakich założeniach bazuje powyższa równość?

b) Rozważ sferycznie symetryczny rozkład cieczy w stanie równowagi hydrostatycznej. Przyjmij, że równanie stanu dla tej cieczy jest postaci:

$$P = K\rho^2, \tag{9}$$

gdzie K jest pewną stałą. Pokaż, że dla rozważanego przypadku, równanie Naviera-Stokesa wraz z równaniem Poissona prowadzą do równania

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta, \tag{10}$$

gdzie

$$\theta(r) := \frac{\rho(r)}{\rho_0}, \tag{11}$$

$$\xi := \frac{r}{r_0}, \tag{12}$$

$$r_0 := \sqrt{\frac{K}{2\pi G}}. \tag{13}$$

Równanie (10) jest szczególnym przypadkiem rówania Lane-Emden spotykanego w teorii budowy gwiazd.

c) Pokaż, że równanie (10), wraz z warunkiem brzegowym $\theta(0) = 1$, ma rozwiązanie w postaci

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}. \tag{14}$$

Stąd, rozkład gęstości

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sin(r/r_0)}{r/r_0}. \tag{15}$$

Jakie są rozmiary otrzymanej struktury grawitacyjnej?

d) Wyznacz funkcję masy $M(r)$ oraz prędkość rotacji $v_c(r)$ dla rozkładu (15). Przedyskutuj otrzymany wynik w kontekście problemu krzywych rotacji galaktyk.

e) Zastosuj rozważany model do opisu halo ciemnej materii galaktyki o promieniu $R \approx 15$ kpc. Dla tego obiektu, maksymalna prędkość rotacji $v_c \approx 200$ km/s. Na tej podstawie, wyznacz masę halo ciemnej materii w jednostkach $M_\odot$. Wyznacz wartość parametru K oraz parametru $\rho_0[M_\odot/\mathrm{pc}^3]$.

Podpowiedź. Przydatne może okazać się, że funkcja

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x, \tag{16}$$

określona na przedziale $x \in [0, \pi]$ osiąga maksimum dla $x_* \approx 2.74$, a stąd $f(x_*) \approx 1.06$.

f) Jaka jest prędkość rozchodznia się zaburzeń (dźwięku) c_s[m/s] w centrum rozważanego rozkładu ciemnej materii. Skorzystaj ze wzoru

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \tag{17}$$

Jakub Mielczarek