

1. **Sfera izotermiczna** może opisywać rozkład materii w galaktyce lub gromadzie galaktyk. W zadaniu zastosujemy model sfery izotermicznej do opisu galaktycznego halo ciemnej materii.

a) Rozważ sferycznie symetryczny, stacjonarny rozkład cząstek. Dla takiego układu mamy  $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = \bar{v}_\phi = 0$  oraz  $\sigma_{r\theta}^2 = \sigma_{r\phi}^2 = \sigma_{\theta\phi}^2 = 0$ . Ponadto  $\sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_{\phi\phi}^2 \equiv \sigma_t^2$ . Wyjaśnij skąd to wynika. Następnie pokaż, że radialne równanie Jeansa (Zestaw 3) dla tego układu upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dr} (\nu \sigma_{rr}^2) + 2 \frac{(\sigma_{rr}^2 - \sigma_t^2)}{r} = - \frac{d\Phi}{dr}. \quad (1)$$

b) W przypadku symetrii sferycznej, potencjał grawitacyjny jest funkcją tylko promienia. Na podstawie sferycznego równania Poissona pokaż, że

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \text{gdzie} \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr. \quad (2)$$

c) W przypadku sferycznej równowagi hydrostatycznej mamy  $\sigma_{rr}^2 = \sigma_t^2 = \sigma^2$ . Odstępstwo od tego stanu mierzy współczynnik anizotropii

$$\beta \equiv 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{rr}^2}. \quad (3)$$

Czy da się obserwacyjnie wyznaczyć wartość parametru  $\beta$ ? Wykorzystując równania (1) i (2) pokaż, że

$$M(r) = - \frac{r \sigma_{rr}^2}{G} \left[ \frac{d \ln \nu}{d \ln r} + \frac{d \ln \sigma_{rr}^2}{d \ln r} + 2\beta(r) \right]. \quad (4)$$

d) Rozważmy stan równowagi hydrostatycznej. Ponadto przyjmijmy, że rozkład jest izotermiczny, tzn. dyspersja prędkości nie zależy od położenia. Biorąc  $\rho = m\nu$ , pokaż, że równanie na rozkład gęstości dla sfery izotermicznej przyjmuje postać

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \rho \right) = - \frac{4\pi G \rho}{\sigma^2}. \quad (5)$$

Sprawdź, że rozwiązaniem tego równania jest

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}. \quad (6)$$

Pokaż stąd, że  $M(r) = \frac{2\sigma^2 r}{G}$ . Przedyskutuj granice  $r \rightarrow 0$  oraz  $r \rightarrow \infty$  dla  $\rho(r)$  i  $M(r)$ .

e) Rozważ ruch obrotowy (stałe  $r$ , czyli  $v_r=0$ ) gwiazdy w otrzymanym rozkładzie masy. Pokaż, że prędkość ruchu obrotowego  $v_c^2 = v_\theta^2 + v_\phi^2$  dana jest przez

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{a stąd} \quad v_c^2 = \frac{GM(r)}{r}. \quad (7)$$

Pokaż, że dla sfery izotermicznej zachodzi

$$v_c = \sqrt{2}\sigma. \quad (8)$$

Jak ten wynik wiąże się z problemem krzywych rotacji galaktyki? (Porównaj otrzymany rezultat z przypadkiem  $\rho = \text{const}$  oraz  $M = \text{const}$ )

f) Rozważ model izotermicznego halo galaktycznego złożonego z hipotetycznych cząstek aksjonów o masach  $m_a = 10^{-3}$  eV. Pomiar prędkości wskazują, że krzywa rotacji Drogi Mlecznej osiąga *plateau* dla  $v_c \approx 200$  km/s. Na tej podstawie wyznacz temperaturę aksjonów. Wykorzystaj tu zasadę ekwiparycji energii. Czy aksjony tworzące halo są relatywistyczne? Pokaż, że spełnione są zależności

$$\rho(r) = \frac{kT}{2\pi G m_a} \frac{1}{r^2} \quad \text{oraz} \quad M(r) = \frac{2kT}{m_a G} r. \quad (9)$$

Ile aksjonów ciemnej materii znajduje się w jednym metrze sześciennym w sali ćwiczeń?