Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 3
25.10.2010, wtorek, godz. 16.00-17.30, Fort Góra

1. **Sfera izotermiczna** może opisywać rozkład materii w galaktyce lub gromadzie galaktyk. W zadaniu zastosujemy model sfery izotermicznej do opisu galaktycznego halo ciemnej materii.

a) Rozważ sferycznie symetryczny, stacjonarny rozkład cząstek. Dla takiego układu mamy $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = \bar{v}_\phi = 0$ oraz $\sigma^2_{r\theta} = \sigma^2_{r\phi} = \sigma^2_{\theta\phi} = 0$. Ponadto $\sigma^2_{\theta\theta} = \sigma^2_{\phi\phi} \equiv \sigma^2_t$. Następnie pokaż, że radialne równanie Jeansa

$$\nu\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial t} + \nu\left(\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\theta} + \frac{\bar{v}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\sigma^2_{rr}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nu\sigma^2_{r\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\nu\sigma^2_{r\phi}\right)$$
$$+\frac{\nu}{r}\left[2\sigma^2_{rr} - \left(\sigma^2_{\theta\theta} + \sigma^2_{\phi\phi} + \bar{v}^2_\theta + \bar{v}^2_\phi\right) + \sigma^2_{r\theta}\cot\theta\right] = -\nu\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{1}$$

upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{dr}(\nu\sigma^2_{rr}) + 2\frac{(\sigma^2_{rr} - \sigma^2_t)}{r} = -\frac{d\Phi}{dr}. \tag{2}$$

b) W przypadku symetrii sferycznej, potencjał grawitacyjny jest funkcją tylko promienia. Na podstawie sferycznego równania Poissona pokaż, że

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \text{gdzie} \quad M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r)r^2 dr. \tag{3}$$

c) W przypadku sferycznej równowagi hydrostatyczej mamy $\sigma^2_{rr} = \sigma^2_t = \sigma^2$. Odstępstwo od tego stanu mierzy współczynnik anizotropii

$$\beta \equiv 1 - \frac{\sigma^2_t}{\sigma^2_{rr}}. \tag{4}$$

Czy da się obserwacyjnie wyznaczyć wartość parametru β? Wykorzystując rówania (2) i (3) pokaż, że

$$M(r) = -\frac{r\sigma^2_{rr}}{G}\left[\frac{d\ln\nu}{d\ln r} + \frac{d\ln\sigma^2_{rr}}{d\ln r} + 2\beta(r)\right]. \tag{5}$$

d) Rozważmy stan równowagi hydrostatycznej. Ponadto przyjmijmy, że rozkład jest izotermiczny, tzn. dyspersja prędkości nie zależy od położenia. Biorąc $\rho = m\nu$, pokaż, że równanie na rozkład gęstości dla sfery izotermicznej przyjmuje postać

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{d}{dr}\rho\right) = -\frac{4\pi G\rho}{\sigma^2}. \tag{6}$$

Sprawdź, że rozwiązaniem tego rówania jest

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}. \tag{7}$$

Pokaż stąd, że $M(r) = \frac{2\sigma^2 r}{G}$. Przedyskutuj granice $r \to 0$ oraz $r \to \infty$ dla $\rho(r)$ i $M(r)$.

e) Rozważ ruch obrotowy (stałe r, czyli v_r=0) gwiazdy w otrzymanym rozkładzie masy. Pokaż, że prędkość ruchu obrotowego $v^2_c = v^2_\theta + v^2_\phi$ dana jest przez

$$\frac{v^2_c}{r} = \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{a stąd} \quad v^2_c = \frac{GM(r)}{r}. \tag{8}$$

Pokaż, że dla sfery izotermicznej zachodzi

$$v_c = \sqrt{2}\sigma. \tag{9}$$

Jak ten wynik wiąże się z problemem krzywych rotacji galaktyki? (Porównaj otrzymany rezultat z przypadkiem $\rho =$ const oraz $M =$ const)

f) Rozważ model izotermicznego halo galaktycznego złożonego z hipotetycznych cząstek aksjonów o masach $m_{\mathrm{a}} = 10^{-3}$ eV. Pomiary prędkości wskazują, że krzywa rotacji Drogi Mlecznej osiąga *plateau* dla $v_c \approx 200$km/s. Na tej podstawie wyznacz temperaturę aksjonów. Wykorzystaj tu zasadę ekwiparycji energii. Czy aksjony tworzące halo są relatywisyczne? Pokaż, że spełnione są zależności

$$\rho(r) = \frac{kT}{2\pi G m_{\mathrm{a}}} \frac{1}{r^2} \quad \text{oraz} \quad M(r) = \frac{2kT}{m_{\mathrm{a}} G} r. \tag{10}$$

Ile aksjonów ciemnej materii znajduje się w jednym metrze sześciennym w sali ćwiczeń?

Jakub Mielczarek