Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 3
19.10.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Relacja Faber-Jacksona.** Na podstawie obserwacji galaktyk eliptycznych astronomowie Sandra M. Faber oraz Robert E. Jackson wykazali, że jasność całkowita galaktyki L zależy od dyspersji prędkości gwiazd σ jak

$$L \propto \sigma^4. \tag{1}$$

[Zobacz: S. M. Faber and R. E. Jackson,"Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies", Astrophysical Journal, vol. **204**, Mar. 15, 1976, pt. 1, p. 668-683.]. Wykaż teoretycznie, skąd bierze się ta zależność.

a) Rozważ model galaktyki eliptycznej jako jednorondy, sferycznie symetryczny rozkład masy. Niech masa całkowita tej galaktyki wynosi M, a jej promień R. Pokaż, że całkowita energia potencjalna układu wynosi

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \tag{2}$$

b) W rozważanym przypadku, symetria implikuje $\sigma_{xx}^2 = \sigma_{yy}^2 = \sigma_{zz}^2 = \sigma^2$ oraz $\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$. Wyjaśnij to. Pokaż, że średnia energia kinetyczna układu jest dana przez

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2}M\sigma^2. \tag{3}$$

Przyjmij tutaj, że masy gwiazd są równe. Wykorzystując następnie twierdznie o wiriale (Zestaw 1) pokaż, że

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\frac{GM}{R}. \tag{4}$$

c) Przyjmij, że stosunek masa-jasność, M/L jest wielkością stałą. Czy możemy tak zrobić? Jeśli tak, to wyjaśnij dlaczego i kiedy. Wykorzystaj zależność $L = 4\pi R^2 B$, gdzie B jest jasnością powierzchniową. Przyjmij, że $B =$const. Uzasadnij taki wybór. Na tej podstawie pokaż, że spełniona jest relacja Faber-Jacksona (1).

d) Przyjmij, że relacja masa-jasność skaluje się jak $M/L \propto M^a$. Na tej podstawie wyznacz zmodyfikowaną relację Faber-Jacksona w postaci $L \propto \sigma^\gamma$. Wyznacz γ w funkcji parametru a.

e) Zastanów się, czy można wyznaczyć podobną do (1) zależnoś dla galaktyk spiralnych.

2. **Równanie Jeansa we współrzędnych sferycznych.** Równanie Boltzmanna we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{v}_r\frac{\partial f}{\partial v_r} + \dot{v}_\theta\frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \dot{v}_\phi\frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0. \tag{5}$$

Wyznacz równania ruchu we współrzędnych sferycznych w polu potencjału Φ:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v_r, & (6)\\
\dot{\theta} &= \frac{v_\theta}{r}, & (7)\\
\dot{\phi} &= \frac{v_\phi}{r\sin\theta}, & (8)\\
\dot{v}_r &= \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & (9)\\
\dot{v}_\theta &= \frac{v_\phi^2 \cot\theta - v_r v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, & (10)\\
\dot{v}_\phi &= \frac{-v_\phi v_r - v_\phi v_\theta \cot\theta}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. & (11)
\end{aligned}$$

Następnie, na podstawie równania Boltzmanna, wyprowadź radialne równanie Jeansa we współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned}
\nu\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \nu\left(\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\sigma_{rr}^2\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\nu\sigma_{r\theta}^2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\nu\sigma_{r\phi}^2\right)\\
+\frac{\nu}{r}\left[2\sigma_{rr}^2 - \left(\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{\phi\phi}^2 + \bar{v}_\theta^2 + \bar{v}_\phi^2\right) + \sigma_{r\theta}^2\cot\theta\right] = -\nu\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Jakub Mielczarek