Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 2
18.10.2010, wtorek, godz. 16.00-17.30, Fort Góra

1. **Równanie ciągłości.** Na podstawie bezkolizyjnego równania Boltzmanna

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \tag{1}$$

wyprowadź równanie ciągłości

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i) = 0, \tag{2}$$

gdzie

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3v f(\mathbf{v},\mathbf{x}) \ \text{ oraz } \ \bar{v}_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})}\int d^3v v_i f(\mathbf{v},\mathbf{x}). \tag{3}$$

W wyprowadzeniu przyjmij, że $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{v},\mathbf{x}) = 0$. Co to fizycznie oznacza? Ponadto przydatna może okazać się równość

$$\int_V \mathbf{g}\cdot\nabla_v f d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} f\mathbf{g}\cdot\mathbf{dS} - \int_V f\nabla_v\cdot\mathbf{g}d^3v. \tag{4}$$

2. **Równanie Jeansa.** Na podstawie równania (1) wyprowadź równanie Jeansa

$$\begin{array}{rcccc} \nu\dfrac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_i\nu\dfrac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} & = & -\nu\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} & - & \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\nu\sigma^2_{ij}) \\ \text{przyśpieszenie} & = & \begin{array}{c}\text{siła}\\ \text{grawitacji}\end{array} & + & \begin{array}{c}\text{gradient}\\ \text{"ciśnienia"}\end{array} . \end{array} \tag{5}$$

Wykorzystaj definicje:

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3v f(\mathbf{v},\mathbf{x}) \quad \text{(koncentracja)}, \tag{6}$$

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})}\int d^3v v_i f(\mathbf{v},\mathbf{x}) \quad \text{(średnia prędkość)}, \tag{7}$$

$$\sigma^2_{ij} \equiv \overline{(v_i-\bar{v}_i)(v_j-\bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i\bar{v}_j \quad \text{(tensor dyspersji prędkości)}. \tag{8}$$

3. **Dysk izotermiczny.** Rozważ przypadek izotermicznego dysku galaktycznego w stanie równowagi hydrostatycznej. Dysk ten posiada symetrię $z \to -z$. Ponadto przyjmij, że dysk składa się z gwiazd o równej masie m, a gęstość dysku ($\rho = m\nu$) zależy tylko od składowej z. Gęstość powierzchniową dysku definiujemy jako

$$\Sigma(z) \equiv \int_{-z}^{z} \rho(z')dz'. \tag{9}$$

a) Pokaż, że równanie Jeansa przybiera postać

$$\sigma^2_{zz}\frac{d^2\ln\rho}{dz^2} = -4\pi G\rho. \tag{10}$$

W wyprowadzeniu wykorzystaj równanie Poissona $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. Rozwiąż równanie (10) postulując rozwiązanie postaci $\rho(z) = \rho_0 \mathrm{sech}^2(\frac{z}{2z_0})$. Znajdź zależność pomiędzy ρ_0 a z_0.

b) Na tej podstawie wyznacz gęstość powierzchniową dysku $\Sigma(z)$ oraz $\Sigma \equiv \Sigma(\infty)$.

c) Obserwując populację gwiazd typu G i K zmierzono dyspersję prędkości $\sigma^2_{zz} \approx (20\mathrm{km/s})^2$. Ponadto wyznaczono skalę wysokości h $\approx$ 300pc zdefiniowaną jako

$$\frac{1}{h} \equiv -\lim_{z\to+\infty}\frac{d}{dz}\ln\rho. \tag{11}$$

Na tej podstawie oszacuj gęstość powierzchniową Σ dysku Drogi Mlecznej. Wynik wyraź w jednostkach $[M_\odot/\mathrm{pc}^2]$.

Jakub Mielczarek