Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 2
12.10.2009, poniedziałek, godz. 14.15-15.45, FORT góra

1. **Równanie Jeansa** to równanie na pierwszy moment równania Boltzmanna.

a) Na podstawie bezkolizyjnego równania Boltzmanna wyprowadź równanie Jeansa

$$\begin{aligned} \nu\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_i \nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} &= -\nu\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu\sigma_{ij}^2) \\ \text{przyśpieszenie} &= \begin{matrix}\text{siła}\\ \text{grawitacji}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{gradient}\\ \text{"ciśnienia"}\end{matrix} \end{aligned} \tag{1}$$

Wykorzystaj definicje

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3v f(\mathbf{v},\mathbf{x}) \quad \text{(gęstość)} \tag{2}$$

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})}\int d^3v v_i f(\mathbf{v},\mathbf{x}) \quad \text{(średnia prędkość)} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{(v_i-\bar{v}_i)(v_j-\bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i\bar{v}_j \quad \text{(tensor dyspersji prędkości)} \tag{4}$$

b) Rozważ przypadek izotermicznego dysku galaktycznego w stanie równowagi hydrostatycznej. Dysk ten posiada symetrię $z \to -z$. Ponadto przyjmij, że gęstość dysku zależy tylko od składowej z. Gęstość powierzchniową dysku definiujemy jako

$$\Sigma(z) = \int_{-z}^{z} \rho(z')dz'. \tag{5}$$

Pokaż, w oparciu o składową $j = 3$ (z) równania (1), że wyrażenie na gęstość powierzchniową dysku możemy zapisać jako

$$\Sigma(z) = -\frac{\sigma_{zz}^2}{2\pi G}\left(\frac{d}{dz}\ln\nu\right). \tag{6}$$

Wykorzystaj tu równanie Poissona $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho$.

c) Obserwując populację gwiazd typu G i K zmierzono dyspersję prędkości $\sigma_{zz}^2 = (20\text{km/s})^2$. Ponadto wyznaczono skalę wysokości h = 300pc zdefiniowaną jako

$$h^{-1} \equiv -\frac{d}{dz}\ln\nu. \tag{7}$$

Na tej podstawie wyznacz gęstość powierzchniową Drogi Mlecznej. Wynik wyraź w jednostkach $[M_\odot/\text{pc}^2]$.

2. **Dysk izotermiczny**. Rozważ planarny układ gwiazd o jednakowej masie m, wtedy $\rho = m\nu$. Układ ten traktujemy jako gaz izotermiczny w stanie równowagi hydrostatycznej. Ponadto $\rho = \rho(|z|)$.

a) Pokaż, w oparciu o równanie (1), że wyrażenie na gęstość dane jest równaniem

$$\overline{v_z^2}\frac{d^2\ln\rho}{dz^2} = -4\pi G\rho. \tag{8}$$

Rozwiąż to równanie, postulując rozwiązanie typu $\rho(z) = \rho_0 \text{sech}^2(\frac{z}{2z_0})$.

b) Na podstawie danych z poprzedniego zadania wyznacz parametry modelu. Wylicz też gęstość powierzchniową $\Sigma(z)$ a stąd $\Sigma \equiv \Sigma(\infty)$. Jaki jest związek pomiędzy z_0 a skalą wysokości h?

c) Wyznacz potencjał grawitacyjny $\Phi(z)$. Stąd, na podstawie równania Newtona $\ddot{z} = -\frac{d\Phi}{dz}$, wyznacz ruch gwiazdy w kierunku z w przypadku $|z| \ll 2z_0$. Wylicz okres oscylacji T, wynik podaj w latach.

Jakub Mielczarek