Astronomia gwiazdowa i pozagalaktyczna I - Zestaw 1
7.10.2010, czwartek, godz. 9.00-10.30, DUŻA

1. **Twierdzenie o wiriale**. Rozważ związany grawitacyjnie układ N ciał (np. gwiazd, galaktyk).

a) Wykorzystując wielkość

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \tag{1}$$

nazywaną wiriałem pokaż, że

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = 2T + U, \tag{2}$$

gdzie T jest całkowitą energią kinetyczną, a U całkowitą energią potencjalną układu. Przy wyprowadzeniu wykorzystaj równanie Newtona oraz potencjał grawitacyjny

$$V(r) = -\frac{Gm}{r}. \tag{3}$$

b) Rozważ uśrednione w czasie równanie (2), gdzie średniowanie jest zdefiniowane jako

$$\langle \ldots \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ldots dt. \tag{4}$$

Pokaż, że jeśli $\mathcal{G}(t) < C$, gdzie C jest stałą, to

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0. \tag{5}$$

Co fizycznie oznacza ograniczenie $\mathcal{G}(t) < C$?

c) Zaproponuj jak wykorzystując twierdzenie o wiriale można próbować wyznaczyć masę gromady galaktyk. W 1933 roku, jako pierwszy, zastosował tę metodę Fritz Zwicky do wyznaczenia masy gromady Coma (Abel 1656) [Zobacz: Zwicky, F. (1937). "On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae". Astrophysical Journal **86**, 217]. Na tej podstawie wskazał on na istnienie ciemnej materii.

2. **Równanie Boltzmanna** opisuje ewolucję czasową funkcji rozkładu $f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$ w jednocząstkowej przestrzeni fazowej (przyjmujemy $m = 1$). Równanie to możemy w ogólnej postaci zapisać jako

$$\frac{df}{dt} = C[f], \tag{6}$$

gdzie prawa strona to człon opisujący odziaływanie pomiędzy cząstkami. W astronomii, równanie Boltzmanna ma bardzo wiele zastosowań np. do opisu rozkładu gwiazd w galaktyce lub galaktyk w gromadzie galaktyk.

a) Pokaż, że bezkolizyjne równanie Boltzmann ($C[f] = 0$) dla cząstek w polu potencjału Φ sprowadza się do

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{7}$$

b) Pokaż, że w stanie ustalonym ($\partial f/\partial t = 0$) bezkolizyjne równanie Boltzmanna posiada rozwiązanie postaci $f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) = f(E)$, gdzie E jest energią cząstki, $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \Phi$. Uogólnij to do przypadku innych całek ruchu (tw. Jeansa).

c) Z równania Boltzmanna (7) wyprowadź równanie ciągłości

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i) = 0, \quad \text{gdzie} \tag{8}$$

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3v f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad \text{oraz} \quad \bar{v}_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3v v_i f(\mathbf{v}, \mathbf{x}). \tag{9}$$

W wyprowadzeniu przyjmij, że $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0$. Co to fizycznie oznacza? Ponadto przydatna może okazać się równość

$$\int_V \mathbf{g} \cdot \nabla_v f d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} - \int_V f \nabla_v \cdot \mathbf{g} d^3v. \tag{10}$$

Jakub Mielczarek