Promieniowanie Synchrotronowe

Jakub Mielczarek

7 Grudnia, 2006

Promieniowanie Synchrotronowe (Magnetobremsstrahlung)

Promieniowanie emitowane przez relatywistyczne elektrony w polu magnetycznym

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q}{c} v \wedge B$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mv$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Założenie:

Nie ma strat radiacyjnych (t.j. elektron nie promieniuje synchrotronowo), $\gamma =$const.

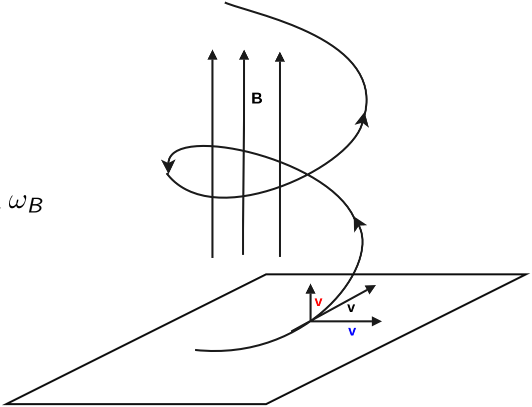
$$\frac{dp}{dt} = \frac{q}{c} v \wedge B$$

$$v = {\color{blue}v_\perp} + {\color{red}v_\parallel}$$

$$\frac{d{\color{blue}v_\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc}{\color{blue}v_\perp} \wedge B = {\color{blue}v_\perp} \wedge \omega_B$$

$$\frac{d{\color{red}v_\parallel}}{dt} = 0$$

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc}$$



Promieniowanie przyśpieszającego elektronu

Równanie Larmora

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4(a_\perp^2 + \gamma^2 a_\parallel^2)$$

$$\begin{aligned} a_\perp = \frac{dv_\perp}{dt} &= \frac{q}{\gamma mc} v_\perp \wedge B = v_\perp \wedge \omega_B \\ a_\parallel = \frac{dv_\parallel}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

$$v_\perp \perp B \;\Rightarrow\; a_\perp = v_\perp \omega_B$$

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4 \frac{q^2 B^2 v_\perp^2}{\gamma^2 m^2 c^2}$$

Jednorodny rozkład prędkości

$$\langle P\rangle = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\frac{q^2B^2v^2}{\gamma^2m^2c^2}\langle\sin^2\alpha\rangle$$

$$\langle\sin^2\alpha\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\sin^2\alpha d\Omega = \frac{2}{3}$$

$$\langle P\rangle = \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2 U_B$$

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \frac{8\pi q^4}{3m^2c^4}\\ U_B &= \frac{B^2}{8\pi}\end{aligned}$$

Chłodzenie synchrotronowe

Enegria elektronów

$$E = \gamma mc^2$$

Wypromieniowana energia na jednostkę czasu

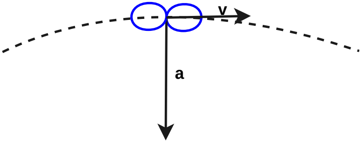
$$\langle P \rangle = \frac{4}{3}\sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

Czas chłodzenia elektronu wynosi

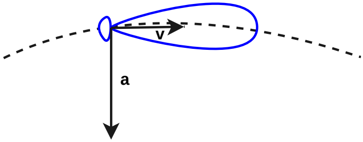
$$t = \frac{3}{4}\frac{\gamma mc^2}{\sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B}$$

Beaming

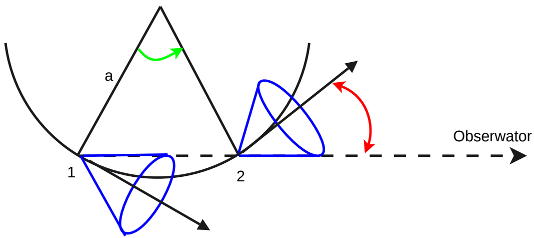
$v \ll c$



$v \sim c$



Widmo promieniownia pojedynczego elektronu



$$\Delta\theta = 2\frac{1}{\gamma}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_B} = \frac{1}{\omega_B}\frac{2}{\gamma} = \frac{2}{\omega_L}$$

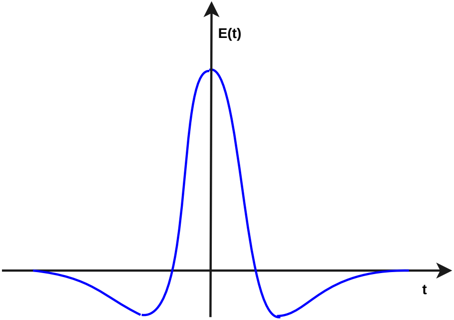
$$\tau = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t$$

$$1 - \frac{v}{c} \approx \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma^2 \omega_L}$$

Częstość charakterystyczna

$$\omega_c = \gamma^2 \omega_L$$



Rozkład potęgowy elektronów

Rozkład potęgowy elektronów

$$n(\gamma)d\gamma = n_0\gamma^{-p}d\gamma$$

Rozkład widmowy elektronów o energii $E = \gamma mc^2$ ma postać

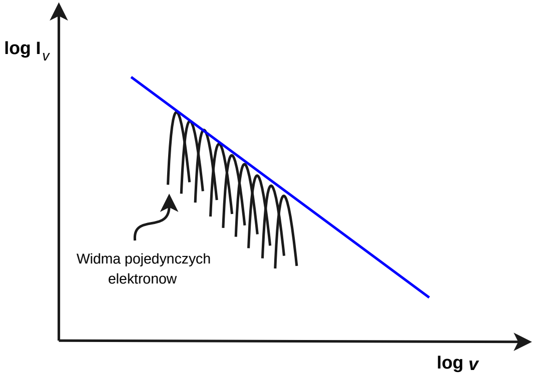
$$\langle P_\nu(\gamma)\rangle = \frac{4}{3}\beta^2\gamma^2 c\sigma_T U_B \phi_\nu(\gamma)$$

gdzie $\phi_\nu(\gamma)$ jest kształtem widma

$$\int \phi_\nu(\gamma)d\gamma = 1$$

Emitowana moc wynosi

$$P_\nu = \int_1^\infty d\gamma \langle P_\nu(\gamma)\rangle n(\gamma)$$



Zakładamy że fotony są emitowane tylko na częstości $\nu_c = \gamma^2 \nu_L$.

$$\phi_\nu(\gamma) = \delta(\nu - \gamma^2 \nu_L)$$

$$P_\nu = \int_1^\infty \underbrace{\frac{4}{3}\beta^2\gamma^2 c\sigma_T U_B \delta(\nu - \gamma^2\nu_L)}_{\langle P_\nu(\gamma)\rangle} n_0 \gamma^{-p} d\gamma$$

Widmo promieniowania synchrotronowego

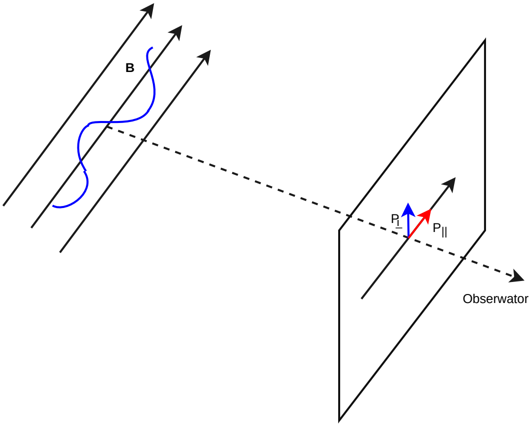
$$P_\nu = \frac{4}{3} c\sigma_T n_0 \frac{U_B}{\nu_L}\left(\frac{\nu}{\nu_L}\right)^{-\frac{p-1}{2}}$$

$$P_\nu \propto \nu^{-\alpha}$$

Indeks spektralny

$$\alpha = \frac{p-1}{2}$$

Polaryzacja



$$\Pi = \frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{P_{\perp} + P_{\parallel}}$$

Polaryzacja

$$\begin{pmatrix} P_{\parallel} \\ P_{\perp} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin\alpha}{4\pi m c^2} \begin{pmatrix} F(\nu/\nu_c) - G(\nu/\nu_c) \\ F(\nu/\nu_c) + G(\nu/\nu_c) \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\begin{aligned} F(x) &= x \int_x^{\infty} dy \ K_{5/3}(y) \\ G(x) &= x \ K_{2/3}(x) \end{aligned}$$

Dla elektronów o rozkładzie potęgowym mamy

$$\Pi = \frac{p+1}{p+\frac{7}{3}}$$

Samoabsorbcja synchrotronowa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - k_\nu I_\nu$$

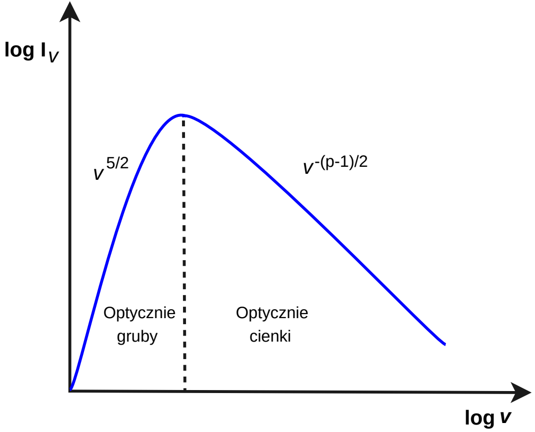
Poniżej pewnej częstości ośrodek jest optycznie gruby na promieniowanie synchrotronowe.

W tym przypadku dla rozkładu potęgowego elektronów widmo synchrotronowe ma postać

$$P_\nu \propto B^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{5}{2}}$$

(Niezależne od indeksu p!)

Widmo promieniowania



Dla małych częstości $P_\nu \propto \nu^{\frac{5}{2}}$
Dla dużych częstości $P_\nu \propto \nu^{-\frac{p-1}{2}}$