

KOSMOLOGIA PĘTLOWO-STRUNOWA

Jakub Mielczarek

Nr albumu: WFAIS/Fz/188/04/05

Praca magisterska
na kierunku Fizyka

Opiekun pracy:
Prof. Jerzy Jurkiewicz
Zakład Teorii Układów Złożonych

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

2008

Streszczenie

W pracy badamy teoriostrunowe modele wszechświata modyfikowane efektami Pętłowej Grawitacji Kwantowej. Dla tego nowego podejścia proponujemy określenie *kosmologia pętlowo-strunowa*. W szczególności rozważamy model z polem dylatonowym oraz oscylacyjny model kolizji bran. W obu modelach zaaplikowane efekty kwantowej grawitacji prowadzą do usuwania zachowań osobliwych. W modelu z polem dylatonowym wszechświat rozpoczyna ewolucję od stanu próżni strunowej dla $t \rightarrow -\infty$. Fazę tą nazywamy też stanem asymptotycznie swobodnym ze względu na znikanie oddziaływań elementarnych. Model ze swobodnym polem dylatonowym rozwiązujemy w sposób ściśle analityczny. Proponujemy także i rozwiązujemy analitycznie oraz numerycznie modele z potencjałem dylatonowym. W badanych modelach z potencjałem obserwujemy stabilizację pola dylatonu dla fazy po Wielkim Wybuchu prowadzącą do saturacji stałej sprzężenia. Wyjściową fazą jest faza de Sittera imitująca obecność stałej kosmologicznej. Rozważania zawarte w tej pracy stanowią punkt wyjścia dla dalszych badań.

Abstract

In this work we investigate String Theory motivated cosmological models modified by the Loop Quantum Gravity effects. For this new approach we propose name *loop-string cosmology*. In particular we consider models with dilaton field and oscillatory models of the brane collisions. In both cases quantum gravity effects lead to the singularity avoidance. In the model with dilaton field universe starts its evolution in the string vacuum phase at time $t \rightarrow -\infty$. The interactions vanish during this stage. We solve analytically model with free dilaton field. We also propose and solve analytically and numerically models with dilaton potential. In these models we observe dilaton stabilization and resulting saturation of the coupling constant in the post-Big Bang phase. Additionally de Sitter phase, which mimic presence of the cosmological constant, emerge in this phase. Investigations presented in this paper can be regarded as the starting point for the further research.

Dziękuję Panu Prof. Jerzemu Jurkiewiczowi, opiekunowi mojej pracy magisterskiej, za współpracę oraz poświęcony mi czas. Dziękuję także Dr hab. Markowi Szydłowskiemu za cenną naukę samodzielnego stawiania i rozwiązywania problemów.

Spis treści

1	Wstęp	8
2	Kosmologia Strunowa	10
2.1	Działanie	10
2.2	Układ strunowy i układ Einsteina	12
2.3	Kosmologiczna T-dualność	13
2.4	Cykliczny model kolizji bran	15
3	Pętlowa kosmologia kwantowa	17
3.1	Teoria Klasyczna	17
3.1.1	FRW $k = 0$	17
3.1.2	Dynamika	18
3.2	Teoria Kwantowa	23
3.2.1	Kinematyka	23
3.2.2	Holonomie	24
3.2.3	Hamiltonian fenomenologiczny	25
4	Kosmologia pętlowo-strunowa: Rozważania analityczne	29
4.1	Polimeryzacja kosmologii strunowej	29
4.2	Model bez potencjału	31
4.3	Model z potencjałem $V(\phi) = V_0 e^{-\phi}$	34
4.3.1	$\Lambda_E = \frac{1}{2}\Lambda_0$	38
5	Kosmologia pętlowo-strunowa: Rozważania numeryczne	43
5.1	Równania ruchu	43
5.2	Model z potencjałem $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$	44
5.3	Model z potencjałem $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + V_0$	47
5.4	Polimeryzacja kolizji bran	49
6	Podsumowanie	52

7	Dodatki	54
7.1	Pola tła i działanie efektywne w Teorii Strun	54
7.2	Elementy Pętlowej Grawitacji Kwantowej	57
7.3	Program do ewolucji numerycznej	60

Lista publikacji

Niektóre wyniki umieszczone w tej pracy zostały opublikowane w następujących pracach:

- J. Mielczarek and M. Szydlowski,
“Universe from vacuum in loop-string cosmology,”
arXiv:0803.1742 [hep-th].
- J. Mielczarek, T. Stachowiak and M. Szydlowski,
“Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology,”
arXiv:0801.0502 [gr-qc]. (przyjęte do druku w Physical Review D)

Inne prace powstałe podczas studiów magisterskich:

- O. Hrycyna, J. Mielczarek and M. Szydlowski,
“Effects of the quantisation ambiguities on the Big Bounce dynamics,”
arXiv:0804.2778 [gr-qc].
- J. Mielczarek and M. Szydlowski,
“Emerging singularities in the bouncing loop cosmology,”
arXiv:0801.1073 [gr-qc]. (przyjęte do druku w Physical Review D)
- J. Mielczarek and M. Szydlowski,
“Relic gravitons from super-inflation,”
arXiv:0710.2742 [gr-qc].
- J. Mielczarek and M. Szydlowski,
“Relic gravitons as the observable for Loop Quantum Cosmology,”
Phys. Lett. B **657** (2007) 20 [arXiv:0705.4449 [gr-qc]].

- J. Mielczarek, T. Stachowiak and M. Szydlowski,
“Vortex in axion condensate as a dark matter halo,”
arXiv:0705.3017 [astro-ph].

1 Wstęp

Istnieje powszechne, fizycznie umotywowane, przekonanie że grawitacja ujawnia swoją kwantową naturę w pobliżu skal energii Plancka. Łatwo możemy jednak dojść do wniosku że energie takie nie zostaną nigdy osiągnięte z obecną generacją akceleratorów. Ten fakt, braku eksperymentalnych możliwości weryfikacyjnych, jest główną przeszkodą w tworzeniu przyszłego kwantowego odpowiednika Ogólnej Teorii Względności. Jednakże według standardowego scenariusza Wielkiego Wybuchu, Wszechświat wywodzi się z fazy w której jego kwantowo-grawitacyjny opis staje się niezbędny. Ten fakt potencjalnie pozwala na weryfikacje kwantowych teorii grawitacji bazując na obserwacjach astronomicznych. Z drugiej strony zastosowanie kwantowej teorii grawitacji do opisu wszechświata może pomóc w odpowiedzi na najbardziej fundamentalne pytania dotyczące jego pochodzenia i stanu początkowego. W szczególności oczekuje się że klasyczna osobliwość kosmologiczna powinna być usunięta. Wszystko to czyni badania kwantowo-grawitacyjnych modeli Wszechświata tak ważnymi i fascynującymi.

Problem kwantowej natury grawitacji formułowany jest obecnie w kilku różnych językach. Jednym z najbardziej obiecujących jest język zmiennych pętlowych będący podstawą Pętlowej Grawitacji Kwantowej (Loop Quantum Gravity - LQG) [1]. Teoria ta jest próbą skwantowania grawitacji w sposób niezależny od wyboru tła. Do rodziny takich teorii zaliczają się też Kauzalna Dynamiczna Triangulacja [2] oraz teorie Piany Spinowej [3,4]. To co niewątpliwie wyróżnia LQG to możliwość otrzymywania w jej ramach wielu analitycznych wyników. Bazując na LQG przewidziano między innymi kwantowanie wielkości geometrycznych jak powierzchnia [5,6] czy objętość [7]. Zastosowanie zmiennych pętlowych w opisie czarnych dziur prowadzi do usunięcia osobliwości wewnętrznej [8] oraz przewiduje poprawną postać wyrażenia na entropię [9]. Wzór na entropię jest uzyskiwany z dokładnością do stałej teorii γ zwanej parametrem Barbero-Immirzi. Wartość tego parametru uzyskuje się z porównania otrzymanej z LQG entropii do tej danej wyrażeniem Hawkinga-Bekensteina $S_{BH} = \frac{k}{4l_{Pl}^2} A$.

Szczególnie interesujące jest zastosowanie pętlowego opisu grawitacji do modeli kosmologicznych. Podejście to zostało zaproponowane i rozwinięte w pionierskich pracach Bojowalda [10–13] w których sformułował on podstawy Pętlowej Kosmologii Kwantowej (Loop Quantum Cosmology - LQC). Teoria ta przyniosła szereg ważnych

wyników jak unikanie początkowej osobliwości [14] oraz właściwe warunki brzegowe dla inflacji [15]. Model Bojowalda został następnie rozwinięty w pracach Ashtekara, Pawłowskiego i Singha [16–18].

Cechą wspólną modeli LQC jest unikanie osobliwości początkowej zastępując ją fazą bounceu. W obrazie tym wszechświat zaczynając ewolucję z fazy niskoenergetycznej ulega kontrakcji a następnie dzięki odpychaniu kwantowemu przechodzi do fazy ekspandującej. W modelach z dodatnią krzywizną wszechświat ulega dodatkowo wtórnym kolapsom w fazie klasycznej. Prowadzi to do obrazu nieosobliwie oscylującego wszechświata [19].

W niniejszej pracy zastosujemy metody pętlowej grawitacji do opisu wysokoenergetycznych zjawisk w Kosmologii Strunowej [20,21]. W szczególności skoncentrujemy się na modelu z polem dylatonowym w którym realizowana jest hipoteza “asymptotycznie przeszłej trywialności” [22,23]. Mianowicie wszechświat zaczyna swoją ewolucję z fazy w której znikają oddziaływania a czynnik skali oraz gęstość energii dążą do zera. Stan ten nazywa się próżnią strunową. Niestety przechodząc do fazy wysokoenergetycznej model ten wymaga zastosowania sztucznych zabiegów aby przejść do obecnej fazy ewolucji. Jak to zostało oryginalnie pokazane przez De Risi, Maartensa i Singha w pracy [24], efekty pętlowej grawitacji dają gładkie przejście przez fazę wysokoenergetyczną. W niniejszej pracy rozwijamy analizę tego modelu wprowadzając potencjał dylatonowy. Znajdujemy także jawne rozwiązania dla modelu De Risi et al.

Kolejny model któremu poświęcimy naszą uwagę to cykliczny model branowy. W modelu tym reżim wysokoenergetyczny odpowiada kolizji bran, co prowadzi do pojawienia się osobliwości w wyższych wymiarach. Efekty pętlowe w tym modelu były badane w pracy Bojowalda, Maartensa i Singha [25]. Kwantowo-grawitacyjne efekty wprowadzali oni poprzez operator odwrotnej objętości. Z dzisiejszej perspektywy stosowanie tego typu poprawek w modelach płaskich jest nieadekwatne. Jedynym typem poprawek które w płaskich modelach możemy brać pod uwagę są poprawki od holonomii. W poniższej pracy konstruujemy i analizujemy model kolizji bran z uwzględnieniem efektów holonomii kwantowych.

Prowadzone w tej pracy rozważania mają charakter fenomenologiczny. Nie dysponujemy mianowicie ścisłym pętlowym opisem zjawisk wysokoenergetycznych w przypadku większej niż 4 liczbie wymiarów. Będziemy więc stosować efektywny opis z punktu widzenia nieskompaktyfikowanej 4-wymiarowej hiperpowierzchni lub brany.

2 Kosmologia Strunowa

Rozważania nasze rozpoczniemy od zdefiniowania pewnych modeli kosmologicznych wynikających z Teorii Strun. Modele te, jak zobaczymy, cechują się wieloma ciekawymi właściwościami. Nie są też jednak wolne od szeregu problemów. Trudności te pojawiają się w reżimie wysokoenergetycznym teorii. W następnych rozdziałach zaplikujemy efektywne metody opisu zjawisk wysokoenergetycznych w tych modelach. Jak zobaczymy będzie to prowadzić do regularyzacji rozbieżności w badanych modelach strunowych. Po bardziej obszerny przegląd kosmologicznych modeli strunowych odsyłamy do prac [20, 26, 27].

2.1 Działanie

Punktem wyjścia do wprowadzenia Kosmologii Strunowej jest działanie [20, 21]

$$S[\phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{12} H^2 \right], \quad (2.1)$$

które jest funkcjonałem trzech pól:

- ϕ - pole dylatonu,
- $g_{\mu\nu}$ - pole grawitacyjne,
- $B_{\mu\nu}$ - pole Kalb-Ramonda (2-forma).

Pole Kalb-Ramonda daje wkład do powyższego działania poprzez $H^2 = H_{\mu\nu\alpha} H^{\mu\nu\alpha}$ gdzie $H_{\mu\nu\alpha} = 3! \partial_{[\mu} B_{\nu\alpha]}$. Wkład od pola grawitacyjnego jest natomiast dany przez wyznacznik $g = \det g_{\mu\nu}$ oraz skalar Ricciego R . Ponadto λ_s to charakterystyczna długość struny zdefiniowana jako $\lambda_s = \sqrt{2\pi\alpha'}$ gdzie α' to parametr nachylenia dla rotującej struny, $J = \alpha' E^2$. Parametr nachylenia α' wiąże się z naprężeniem struny T poprzez relacje $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$. Dodatkowe uwagi odnośnie rozważanych pól oraz działania (2.1) zamieszczono w Dodatku 7.1.

Rozważana teoria zbudowana jest w przestrzeni Ω o wymiarze $\dim\Omega = 10$. Ponadto założyliśmy że przestrzeń ta nie posiada brzegów $\partial\Omega = 0$, znika więc człon

brzegowy działania. Przestrzeń Ω rozkłada się na $\Omega = M \times M_6$ gdzie $\dim M = 4$ oraz $\dim M_6 = 6$. Rozmaitość M jest znaną nam czasoprzestrzenią natomiast M_6 stanowią skompaktyfikowane wymiary.

Wyrażenie (2.1) jest odpowiednikiem działania Hilberta-Einsteina z którego wyprowadzamy równania Ogólnej Teorii Względności. Dla przypomnienia podajemy

$$S_{H-E} = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.2)$$

Istnieją zasadnicze różnice pomiędzy działaniami (2.1) oraz (2.2). Postaramy się teraz je wyszczególnić oraz pokazać w jaki sposób te dwa działania są ze sobą związane. Po pierwsze jak już wspomnieliśmy działanie (2.1) zawiera wkłady od trzech typów pól a nie od jednego jak w przypadku (2.2). Szczególnie istotną rolę odgrywa tu pole dylatonu, które nie-minimalnie sprzęga się z grawitacją. Pod tym względem efekty dynamiczne pola Kalb-Ramonda są słabsze, mianowicie jest ono tylko minimalnie sprzężone z grawitacją. Charakterystyczną cechą odróżniającą części grawitacyjne działania (2.1) oraz (2.2) jest eksponencjalny czynnik dylatonowy $e^{-\phi}$. Efekty takiego dynamicznego czynnika są równoważne zmiennej stałej sprzężenia, dlatego czynnik ten zazwyczaj oznaczamy jako

$$g_s^2 = e^\phi. \quad (2.3)$$

W przypadku $\phi \rightarrow -\infty$ mamy $g^2 \rightarrow 0$ czyli pojawia się asymptotyczna swoboda. Przeciwnie, $\phi \rightarrow \infty$ prowadzi do reżimu silnie sprzężonego. Warto tu zauważyć że działanie (2.1) odpowiada teorii Brans-Dicka z parametrem $\omega = -1$. Kolejną istotną różnicą między (2.1) oraz (2.2) jest różnica wymiarów, w których obie teorie są zbudowane. Mianowicie rozważana teoria superstun zbudowana jest w przestrzeni dziesięciowymiarowej natomiast teoria grawitacji na rozmaitości czterowymiarowej. Standardowym krokiem, który wykonuje się, aby powiązać te dwie teorie jest wyciągnięcie działania strunowego po skompaktyfikowanych wymiarach. Dostajemy wtedy

$$S_{eff} = \frac{l^6}{2\lambda_s^8} \int_M d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{g_s^2} R + \frac{l^6}{2\lambda_s^8} \int_M d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{12} H^2 \right]. \quad (2.4)$$

Widać, że pierwsza część tego działania jest równa działaniu Hilberta-Einsteina jeśli przyjąć

$$\frac{1}{16\pi G} = \frac{l^6}{2\lambda_s^8 g_s^2}. \quad (2.5)$$

Ogólna Teoria Względności przyjmuje stałość czasową i przestrzenną stałej grawitacji Newtona G . Odpowiada to więc przypadkowi, w którym pole dylatonowe przyjmuje

stałą wartość oraz skompaktyfikowane wymiary nie podlegają ewolucji. Możliwe jest też oczywiście wzajemne kompensowanie się zmian związanych z rozmiarami przestrzeni wewnętrznych i zmianą wartości pola dylatonu prowadzące do stałej wartości G . W dalszych rozważaniach nie będziemy zakładać stałości pola dylatonu lecz pozostawimy mu swobodę ewolucji. Przyjmiemy natomiast stałość skompaktyfikowanych wymiarów. W takim przypadku będziemy się spodziewać osiągnięcia przez pole dylatonu stałej wartości dla obecnej niskoenergetycznej fazy Wszechświata.

Efektywne działanie, które będzie podstawą naszych dalszych rozważań przyjmuje więc postać

$$S_{eff} = \frac{1}{16\pi G_4} \int_M d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{12} H^2 \right] \quad (2.6)$$

gdzie zdefiniowaliśmy

$$\frac{1}{16\pi G_4} = \frac{l^6}{2\lambda_s^8}. \quad (2.7)$$

Fizyczną wartość stałej Newtona otrzymujemy biorąc

$$G = g_s^2 G_4. \quad (2.8)$$

2.2 Układ strunowy i układ Einsteina

Działanie (2.6) jest zapisane w tak zwanym układzie strunowym (S-frame). Skalar Riciego jest w takim przypadku mnożony przez czynnik $e^{-\phi}$. Istnieje jednak możliwość pozbycia się tego czynnika wykonując odpowiednią transformację konforemną. Zabieg taki okaże się niezwykle przydatny dla dalszych rozważań. Mianowicie wykonajmy transformację konforemną

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

działania (2.6). Ta transformacja przeprowadza nam działanie do tak zwanego układu Einsteina (E-frame), w którym przybiera ono postać

$$S_{eff}^E = \frac{1}{16\pi G_4} \int_M d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) e^\phi - \frac{1}{12} \tilde{H}^2 e^{-2\phi} \right]. \quad (2.10)$$

Widzimy że w układzie Einsteina G_4 przybiera interpretację stałej Newtona w tym układzie.

2.3 Kosmologiczna T-dualność

Wróćmy teraz do działania (2.1) i rozważmy jego uproszczoną postać, zakładając jednorodność pola dylatonu oraz $B_{\mu\nu} = 0, V(\phi) = 0$ dostajemy wtedy

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} [R - \dot{\phi}^2]. \quad (2.11)$$

Rozważmy postać tego działania dla płaskiej metryki FRW ($k = 0$)

$$ds^2 = -dt^2 + q_{ab} dx^a dx^b \quad (2.12)$$

gdzie $q_{ab} = \delta_{ab} a^2(t)$ i $a, b = 1 \dots D-1$. W tym przypadku skalar Ricciego przyjmuje postać

$$R = 2(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} + (D-1)(D-2) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (2.13)$$

Wstawiając to wyrażenie do (2.11) oraz wyznaczając wyznacznik z metryki dostajemy

$$S = \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^D x a^{D-1} e^{-\phi} \left[2(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} + (D-1)(D-2) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \dot{\phi}^2 \right]. \quad (2.14)$$

Wykorzystując następnie relacje

$$\frac{d}{dt} \left(a^{D-2} d^{-\phi} \dot{a} \right) = a^{D-1} e^{-\phi} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + (D-2) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} \right] \quad (2.15)$$

dostajemy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^D x a^{D-1} e^{-\phi} \left[2(D-1) \dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} - (D-1)(D-2) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \dot{\phi}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^D x a^{D-1} e^{-\phi} \left[(D-1) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\dot{\phi} - (D-1) \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Łatwo stąd zobaczyć że działanie to jest niezmiennicze względem transformacji

$$a(t) \rightarrow \tilde{a}(t) = \frac{1}{a(t)}, \quad (2.17)$$

$$\phi(t) \rightarrow \tilde{\phi}(t) = \phi(t) - 2(D-1) \ln a(t). \quad (2.18)$$

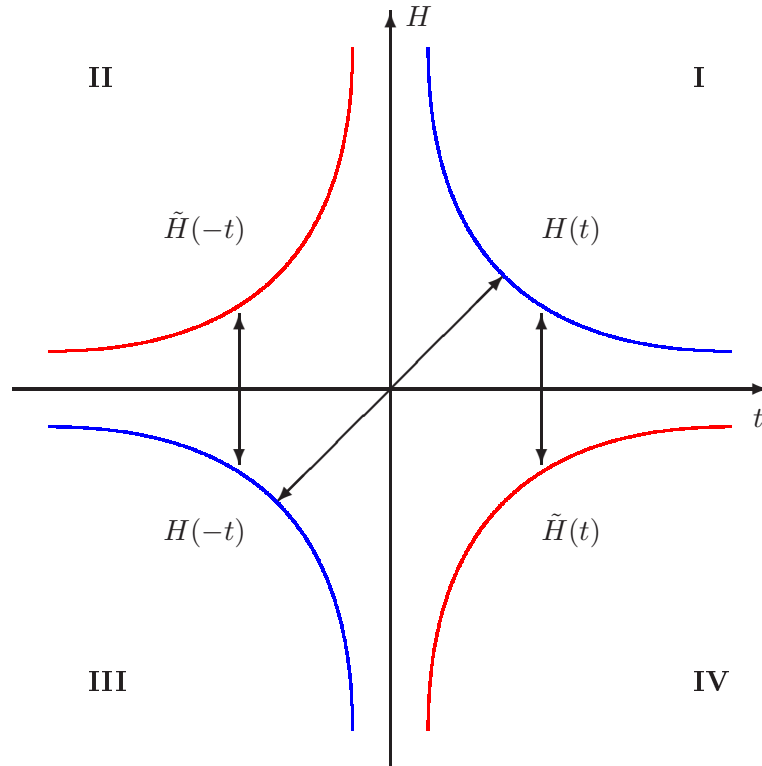
Transformacja ta jest kosmologicznym odpowiednikiem transformacji T-dulaności w teorii strun. Podczas tej transformacji parametr Hubble’a transformuje się jak

$$\tilde{H}(t) = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{dt} = a \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = -H(t). \quad (2.19)$$

Oprócz transformacji T -dualności, działanie jest również niezmiennicze względem odbicia czasu

$$t \rightarrow -t. \quad (2.20)$$

Powyższe transformacje prowadzą do nowych klas rozwiązań równań ruchu. Przedstawiono to na poniższym diagramie.



Krzywa w obszarze I odpowiada fazie ekspansji wszechświata po Wielkim Wybuchu. W obszarze tym w granicy $t \rightarrow 0_+$ otrzymujemy klasyczną osobliwość kosmologiczną, dla której krzywizna $R \rightarrow \infty$. Dysponując rozwiązaniem dla obszaru I możemy wykonać transformację odbicia czasu która, prowadzi do obszaru III. Rozwiązania w tym obszarze odpowiadają wszechświatowi ulegającemu kontrakcji przed Wielkim Wybuchem. W granicy $t \rightarrow 0_-$ wszechświat ten dąży do osobliwości kosmologicznej. Możemy teraz do rozwiązań w obszarach I oraz III zastosować transformację T -dualności.

Pod jej działaniem rozwiązania z obszaru I przechodzą do obszaru IV. Rozwiązania takie odpowiadają fazie kurczenia się wszechświata po Wielkim Wybuchu. Ponieważ obserwacje kosmologiczne wskazują na to, że obecna faza Wszechświata odpowiada typowi z obszaru I, rozwiązania z obszaru IV musimy uznać za nierealizowalne fizycznie. W dalszych rozważaniach najbardziej interesować nas będzie ostatnia klasa rozwiązań. Mianowicie taka, którą dostajemy przez transformacje dualności z obszaru III i zajmującą obszar II. W obszarze tym dostajemy rozwiązania dla ekspandującego wszechświata przed Wielkim Wybuchem.

W Kosmologii Strunowej rozważa się obszary I oraz II jako fizyczne [23, 28–30]. Nie istnieje jednak gładkie połączenie pomiędzy tymi obszarami. Odziela je mianowicie obszar wysokoenergetyczny zawierający osobliwość. Aby połączyć rozwiązania z obszaru I oraz II dokonuje się ich utożsamienia w punkcie samodualnym

$$a(t) = a^{-1}(-t), \quad (2.21)$$

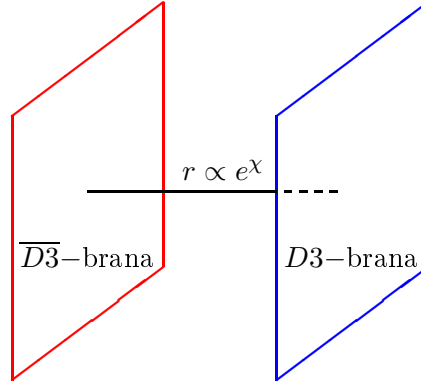
$$\tilde{\phi}(t) = \tilde{\phi}(-t). \quad (2.22)$$

Jest to jednak warunek nielokalny. W praktyce wykonuje się sztuczną regularyzację rozwiązania pomiędzy punktami samodualnymi. W dalszej części pracy będziemy się starać ominąć tę trudność stosując efektywny opis wysokoenergetycznych zjawisk grawitacyjnych.

2.4 Cykliczny model kolizji bran

Struny nie są jedynymi obiektami w Teorii Strun. Mianowicie wybierając brzegowe warunki Dirichleta dla strun dochodzimy do koncepcji tak zwanych bran. Brany uważa się za obiekty równie fizyczne jak struny. Bazując na teorii bran zaproponowano wiele modeli kosmologicznych. Wynikają one głównie z idei światów branowych Hořavy-Wittena [31]. Rozwinięciem tej idei jest model Randall-Sundrum [32], motywowany problemem hierarchii w fizyce cząstek. W tym modelu nasza rzeczywistość odpowiada D3-branie zanurzonej w AdS_5 . Pozostałe pięć wymiarów jest tu skompaktyfikowane.

Ciekawą koncepcją jest tak zwana inflacja branowa. Mianowicie idea ta wynika z faktu, że z punktu widzenia jednej brany obecność drugiej brany w jej pobliżu jest odczuwana jako obecność efektywnego pola skalarnego χ . Zobrazowano to na diagramie poniżej.



Odległość między branami zależy jak

$$r \propto e^\chi. \quad (2.23)$$

W przypadku $\chi \rightarrow -\infty$ następuje zderzenie bran. Prowadzi to do pojawienia się osobliwości w piątym nieskompaktyfikowanym wymiarze, co jest niepożądane. Pojawienie się takich zachowań jest jednak wynikiem nieadekwatnego opisu zjawisk wysokoenergetycznych.

W dalszej części będziemy się koncentrować na tak zwanym cyklicznym modelu branowym [33–36]. W tym przypadku potencjał oddziaływania dla efektywnego pola χ przybiera postać

$$V(\chi) = V_0(1 - e^{-\chi/m_1}) \exp(-e^{-\chi/m_2}). \quad (2.24)$$

Model ten w przypadku $\chi \gg 0$ imituje obecność stałej kosmologicznej $V(\chi) \rightarrow V_0 = \text{const}$. Natomiast dla $\chi < 0$ odzyskiwana jest faza infacyjna produkująca właściwe widmo zaburzeń. W modelach klasycznych pole spada do $\chi \rightarrow -\infty$, co prowadzi do kolizji bran. Modele takie nie prowadzą więc od zachowań oscylacyjnych lecz raczej do jednego cyklu w którym pole dąży od $-\infty$ do pewnej stałej dodatniej wartości a następnie ponownie do $-\infty$. W takim cyklu realizowane są kolejno wszystkie znane fazy ewolucji wszechświata.

3 Pętlowa kosmologia kwantowa

W poprzednim rozdziale badaliśmy obraz wszechświata wynikający z kosmologii strunowej. Szczególnie interesującą cechą takiego podejścia jest otrzymanie bardzo naturalnego stanu początkowego. Mianowicie wszechświat wyłaniał się z zerowych rozmiarów klasycznego stanu asymptotycznie swobodnej próżni. Niestety jednak podejście to napotyka trudności w fazie wysokoenergetycznej. Z klasycznymi trudnościami w reżimie wysokoenergetycznym radzi sobie znakomicie Pętlowa Kosmologia Kwantowa. Teoria ta ma swoje korzenie w nieperturbacyjnym podejściu do kwantowania grawitacji zwanym Pętlową Grawitacją Kwantową. Niniejszy rozdział jest dedykowany wprowadzeniu do Pętlowej Kosmologii Kwantowej. W następnym rozdziale zaaplikujemy wprowadzone tu podejście do modeli strunowych. Dodatkowe informacje na temat Pętlowej Grawitacji Kwantowej, na której bazuje pętlowa kosmologia kwantowa, umieszczono w Dodatku 7.2.

3.1 Teoria Klasyczna

Zanim przejdziemy do kosmologii kwantowej musimy najpierw wprowadzić niezbędny formalizm na poziomie klasycznym. Mianowicie musimy zdefiniować symetrie przestrzeni oraz wprowadzić Hamiltonowski opis grawitacji w języku zmiennych Ashtekara który pozwoli nam na płynne przejście do teorii kwantowej.

3.1.1 FRW $k = 0$

Wszystkie rozważania w tym rozdziale będą bazować na płaskich przestrzeniach z symetrią FRW ($k = 0$). Metryka czasoprzestrzenna ma w takim przypadku postać

$$ds^2 = -N^2(x)dt^2 + q_{ab}dx^a dx^b \quad (3.1)$$

gdzie $N(x)$ jest funkcją lapse natomiast część przestrzenna jest wyrażona jako

$$q_{ab} = \delta_{ij}\omega_a^i\omega_b^j = a^2(t)q_{ab} = a^2(t)\delta_{ij}{}^o\omega_a^i{}^o\omega_b^j = a^2(t)\delta_{ab}. \quad (3.2)$$

Wprowadzone tu obiekty ω_a^i to ko-triady dualne do triad e_i^a , $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$ gdzie 1-forma $\omega^i = \omega_a^i dx^a$ oraz wektor $e_i = e_i^a \partial_a$. Taka sama relacja dualności odnosi się od ko-triad ${}^o\omega_a^i$ związanych z metryką ${}^oq_{ab}$ z której wyłączono zależność od czynnika skali $a(t)$. Wektory ${}^o e_i = {}^o e_i^a \partial_a$, których współczynnikami rozkładu są triady, tworzą nawias Lie

$$[{}^o e_i, {}^o e_j] = C_{ij}^k {}^o e_k \quad (3.3)$$

z dualnym równaniem Maurer-Cartana

$$\partial_a {}^o \omega_b^i = -\frac{1}{2} C_{jk}^i {}^o \omega_a^j {}^o \omega_b^k. \quad (3.4)$$

Dla rozważanego przypadku FRW $k = 0$ stałe struktury $C_{ij}^k = 0$ dając

$$\begin{aligned} {}^o e_1 &= \partial_1 & {}^o \omega^1 &= dx^1, \\ {}^o e_2 &= \partial_2 & {}^o \omega^2 &= dx^2, \\ {}^o e_3 &= \partial_3 & {}^o \omega^3 &= dx^3. \end{aligned}$$

Stąd i z przestrzennej części metryki (3.2) możemy bezpośrednio odczytać

$$\omega_a^i = a \delta_a^i = a {}^o \omega_a^i, \quad (3.5)$$

$$e_i^a = \frac{1}{a} \delta_i^a = \frac{1}{a} {}^o e_i^a. \quad (3.6)$$

Stąd także łatwo znajdujemy relacje

$$\sqrt{|\det q|} = a^3 \sqrt{|\det {}^o q|}. \quad (3.7)$$

3.1.2 Dynamika

Pętlowa Kosmologia Kwantowa bazuje na Hamiltonowskim (kanonicznym) sformułowaniu teorii grawitacji. W podejściu takim zakłada się foliację czasoprzestrzeni M w postaci $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ gdzie Σ jest rozmaitością przestrzenną. Hiperpowierzchnie Σ_t są numerowane przez globalną funkcję czasu t . Metryka w takiej przestrzeni może być zapisana jako

$$ds^2 = -\omega^0 \otimes \omega^0 + q_{ab} \omega^a \otimes \omega^b \quad (3.8)$$

gdzie 1-formy

$$\omega^0 = N dt, \quad (3.9)$$

$$\omega^a = dx^a + N^a dt. \quad (3.10)$$

Wielkość N jest tak zwana funkcją lapse. Mierzy ona różnicę pomiędzy czasem współrzędnościowym, a czasem właściwym τ na krzywej normalnej do hiperpowierzchni Σ_t . Wielkość N^a to tak zwany shift vector. Mierzy on przesunięcie pomiędzy danym punktem przestrzennym a punktem który osiągnęlibyśmy podążając wzdłuż normalnej do hiperpowierzchni Σ . Współrzędne są nazywane współporuszającymi, gdy $N^a = 0$. Wielkość q_{ab} to metryka na hiperpowierzchni przestrzennej Σ .

W rozważanym podejściu kanonicznym, Hamiltonian teorii grawitacji przybiera postać sumy wiezów

$$H_G^{\text{ot}} = \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} (N^i G_i + N^a C_a + N h_{\text{sc}}). \quad (3.11)$$

Więź dyfeomorfizmów przestrzennych wyraża się jako

$$C_a = E_i^b F_{ab}^i - (1 - \gamma^2) K_a^i G_i. \quad (3.12)$$

Więź Gaussa wyraża się jako

$$G_i = D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a. \quad (3.13)$$

Więź skalarny wyraża się jako

$$H_G := \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} N(x) h_{\text{sc}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} N(x) \left(\frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \epsilon^{ij}{}_{k} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} K_{[a}^i K_{b]}^j \right)$$

gdzie $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ jest krzywizną koneksji Ashtekara A . Koneksja A oraz kanonicznie do niej sprzężona gęstość triadu E spełniają nawias Poissona

$$\{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.14)$$

gdzie

$$\{M(\mathbf{x}), N(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \int_{\Sigma} d^3\mathbf{z} \left[\frac{\delta M(\mathbf{x})}{\delta A_b^j(\mathbf{z})} \frac{\delta N(\mathbf{y})}{\delta E_j^b(\mathbf{z})} - \frac{\delta N(\mathbf{x})}{\delta A_b^j(\mathbf{z})} \frac{\delta M(\mathbf{y})}{\delta E_j^b(\mathbf{z})} \right]. \quad (3.15)$$

Wprowadzone powyżej indeksy $i, j, k \dots$ należą do grupy $SU(2)$ natomiast $a, b, c \dots$ to indeksy przestrzenne na Σ . Zmienne Ashtekara ($A = A_a^i \tau_i dx^a, E = E_i^a \tau^i \partial_a$) są

zdefiniowane jako

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (3.16)$$

$$E_i^a = \sqrt{|\det q|} e_i^a \quad (3.17)$$

gdzie Γ_a^i jest koneksją spinową

$$\Gamma_a^i = -\epsilon^{ijk} e_j^b (\partial_{[a} e_{b]}^k + \frac{1}{2} e_k^c e_a^l \partial_{[c} e_{b]}^l) \quad (3.18)$$

oraz $K_a^i := K_{ab} e_i^b$ gdzie K_{ab} jest krzywizną wewnętrzną

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - 2D_{[a} N_{b]}). \quad (3.19)$$

Wyznamy teraz zmienne Ashtekara dla zdefiniowanego w poprzednim podrozdziale płaskiego modelu FRW. Wykorzystując relację (3.7) dostajemy

$$E_i^a = \sqrt{|\det q|} e_i^a = a^2 \sqrt{|\det^o q|} e_i^a. \quad (3.20)$$

Zazwyczaj gęstość triadu E parametryzujemy zmienną \tilde{p} , wtedy

$$E = \tilde{p} \sqrt{|\det^o q|} e_i^a \tau_i \partial_a \quad (3.21)$$

gdzie $|\tilde{p}| = a^2$. Wielkość \tilde{p} może przybierać zarówno dodatnie jak i ujemne wartości, co odpowiada różnym orientacjom przestrzeni.

Dla rozważanego przypadku metryki FRW $k = 0$ wszystkie składowe koneksji spinowej znikają, $\Gamma_a^i = 0$. Dostajemy więc

$$A_a^i = \gamma K_a^i. \quad (3.22)$$

Na podstawie (3.19) wyznaczamy

$$K_{ab} = a \dot{a} \delta_{ij} e_a^i e_b^j \quad (3.23)$$

co daje

$$K_a^i = K_{ab} e_i^b = a \dot{a} \delta_{kj} e_a^k e_b^j \frac{1}{a} e_i^b = \dot{a} e_a^i. \quad (3.24)$$

Wprowadzając parametr $\tilde{c} = \gamma \dot{a}$ dostajemy

$$A = \tilde{c} e_a^i \tau_i dx^a. \quad (3.25)$$

Łatwo pokazać że więź Gaussa 3.13 zeruje się, nie daje więc wkładu do Hamiltonianu. Ponadto wybór cechowania z $N^a = 0$ usuwa nam wkład od więzów dyfeomorfizmów przestrzennych 3.12. Pozostaje nam do wyznaczenia więzi skłarny

$$H_G = \frac{V_0}{16\pi G} e^{-1} \left(E_i^a E_j^b \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) E_i^a E_j^b K_{[a}^i K_{b]}^j \right) \quad (3.26)$$

gdzie $e = \sqrt{|\det E|}$. Ograniczyliśmy tu całkowanie przestrzenne do obszaru V_0 . Zabieg taki nie zmienia w żadnym stopniu rozważań na poziomie klasycznym. Jak jednak zobaczymy, będzie on prowadził do ważnych konsekwencji w przypadku kwantowym. Wszystkie wielkości fizyczne nie będą jednak zależne od wyboru V_0 .

W rozważanym modelu płaskim wyrażenie na krzywiznę koneksji Ashtekara redukuje się do

$$F_{ab}^k = \underbrace{\partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k}_{=0} + \epsilon^k{}_{ij} A_a^i A_b^j = \epsilon^k{}_{ij} A_a^i A_b^j. \quad (3.27)$$

Wstawiając to do pierwszego członu w wyrażeniu (3.26) dostajemy

$$\begin{aligned} e^{-1} E_i^a E_j^b \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k &= e^{-1} E_i^a E_j^b \epsilon^{ij}{}_k \epsilon^k{}_{lm} A_a^l A_b^m \\ &= e^{-1} E_i^a E_j^b [\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i] A_a^l A_b^m \\ &= e^{-1} E_i^a E_j^b [A_a^i A_b^j - A_a^j A_b^i]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Wstawiając następnie

$$K_a^i = \frac{1}{\gamma} A_a^i \quad (3.29)$$

do drugiego członu w wyrażeniu (3.26) otrzymujemy

$$\begin{aligned} -2(1 + \gamma^2) e^{-1} E_i^a E_j^b K_{[a}^i K_{b]}^j &= -2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right) e^{-1} E_i^a E_j^b A_{[a}^i A_{b]}^j \\ &= - \left(\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right) e^{-1} E_i^a E_j^b [A_a^i A_b^j - A_a^j A_b^i] \end{aligned} \quad (3.30)$$

co razem (3.28) daje

$$H_G = - \frac{V_0}{16\pi G} e^{-1} E_i^a E_j^b [A_a^i A_b^j - A_a^j A_b^i]. \quad (3.31)$$

Ostatecznie wstawiając wyrażenia na koneksje Ashtekara oraz gęstość triadu dosta-

jemy

$$\begin{aligned}
 H_G &= -\frac{V_0}{16\pi G\gamma^2} e^{-1} E_i^a E_j^b [A_a^i A_b^j - A_a^j A_b^i] \\
 &= -\frac{V_0}{16\pi G\gamma^2} \frac{|\tilde{p}|^2}{|\tilde{p}|^{3/2}} \tilde{c}^{2o} e_i^{ao} e_j^{bo} [\omega_a^i \omega_b^j - \omega_a^j \omega_b^i] \\
 &= -\frac{V_0}{16\pi G\gamma^2} \sqrt{|\tilde{p}|} \tilde{c}^2 \underbrace{[e_i^{ao} e_j^{bo} \omega_a^i \omega_b^j - e_i^{ao} e_j^{bo} \omega_a^j \omega_b^i]}_{9-3=6} \\
 &= -\frac{3V_0}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|\tilde{p}|} \tilde{c}^2
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

gdzie wykorzystaliśmy

$$e = \sqrt{|\det E|} = |\tilde{p}|^{3/2}. \tag{3.33}$$

Aby zaabsorbować czynnik V_0 wprowadzamy nowe zmienne

$$p = \tilde{p} V_0^{2/3}, \quad c = \tilde{c} V_0^{1/3}. \tag{3.34}$$

Hamiltonian grawitacyjny przybiera wtedy postać

$$H_G = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} c^2. \tag{3.35}$$

Hamiltonian dla pola skłarnego przyjmuje w zmiennych Ashtekara postać

$$H_\phi = \int_\Sigma d^3\mathbf{x} N(x) \left(\frac{1}{2} \frac{\pi_\phi^2}{\sqrt{|\det E|}} + \frac{1}{2} \frac{E_i^a E_i^b \partial_a \phi \partial_b \phi}{\sqrt{|\det E|}} + \sqrt{|\det E|} V(\phi) \right). \tag{3.36}$$

Dla rozważanego przypadku płaskiego modelu FRW oraz zakładając jednorodność pola redukuje się on do

$$H_\phi = \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\phi). \tag{3.37}$$

Nawias Poissona dla takiego zredukowanego systemu przyjmuje postać

$$\{f, g\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} \left[\frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial c} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial p_\phi} - \frac{\partial f}{\partial p_\phi} \frac{\partial g}{\partial \phi} \right]. \tag{3.38}$$

Elementarne nawiasy przyjmują więc postać

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} \quad \text{oraz} \quad \{\phi, \pi_\phi\} = 1. \tag{3.39}$$

Wykorzystując równania Hamiltona $\dot{f} = \{f, H_{\text{tot}}\} = \{f, H_G + H_\phi\}$ dostajemy

$$\dot{p} = \{p, H_{\text{tot}}\} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{|p|} c, \quad (3.40)$$

$$\dot{c} = \{c, H_{\text{tot}}\} = -\frac{1}{2\gamma} \frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{|p|}} c^2 + \text{sgn}(p) \frac{\kappa\gamma}{2} \left[-\frac{\pi_\phi^2}{2|p|^{5/2}} + \sqrt{|p|} V(\phi) \right], \quad (3.41)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_{\text{tot}}\} = |p|^{-3/2} \pi_\phi, \quad (3.42)$$

$$\dot{\pi}_\phi = \{\pi_\phi, H_{\text{tot}}\} = -|p|^{3/2} \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (3.43)$$

Wykorzystując teraz więz Hamiltona

$$H_{\text{tot}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} c^2 + \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\phi) = 0 \quad (3.44)$$

oraz równanie (3.40) dostajemy klasyczne równanie Friedmanna

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{p}}{2p} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \quad (3.45)$$

gdzie

$$\rho_\phi = \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^3} + V(\phi). \quad (3.46)$$

3.2 Teoria Kwantowa

3.2.1 Kinematyka

Pętlowe kwantowanie wymaga zamiany klasycznych zmiennych przez operatory kwantowe wyrażane przez holonomie i strumienie. W przypadku modeli FRW holonomie redukują się do funkcji prawie periodycznych $\sum_j \xi_j e^{i\mu_j c/2}$ natomiast strumienie do zmiennej p . Funkcje prawie periodyczne są odpowiednikiem funkcji cylindrycznym w pełnej teorii. Następnie, w analogii do pełnej teorii algebra zmiennych p oraz $e^{i\mu c/2}$ jest kwantowana. Kwantowy nawias Poissona dla elementarnych operatorów przybiera postać

$$\left[\hat{p}, e^{\widehat{\frac{i\mu c}{2}}} \right] = \mu \frac{8\pi G\gamma}{6} e^{\widehat{\frac{i\mu c}{2}}}, \quad (3.47)$$

operatory te działają w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$. Jako bazę tej przestrzeni wybieramy zbiór wartości własnych operatora \hat{p}

$$\hat{p}|\mu\rangle = \mu \frac{8\pi G\gamma l_{\text{Pl}}^2}{6} |\mu\rangle \quad (3.48)$$

spełniających warunek normalizacji $\langle \mu | \mu' \rangle = \delta_{\mu, \mu'}$. Działanie operatora $\hat{N} = e^{\frac{i\mu c}{2}}$ jest następujące

$$e^{\frac{i\mu c}{2}} |\mu'\rangle = |\mu' + \mu\rangle. \quad (3.49)$$

Dany stan Wszechświata $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$ można przedstawić jako przeliczalną sumę

$$|\Psi\rangle = \sum_n c^{(n)} |\mu_n\rangle \quad (3.50)$$

gdzie $c^{(n)} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n \bar{c}^{(n)} c^{(n)} < \infty. \quad (3.51)$$

Na podstawie powyższych definicji widać że dla $\Psi(p) := \langle p | \Psi \rangle$ mamy

$$\hat{p}\Psi(p) = p\Psi(p), \quad (3.52)$$

$$\hat{N}_\mu \Psi(p) = \Psi(p + \mu). \quad (3.53)$$

Dziedzina operatorów jest natomiast zdefiniowana jako

$$\mathcal{D} = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} : |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n c^{(i)} |\mu_i\rangle, c^{(i)} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.54)$$

3.2.2 Holonomie

Holonomia wzdłuż krzywej $\alpha \in \Sigma$ jest zdefiniowana jako

$$h_\alpha = \mathcal{P} \exp \int_\alpha \tau_i A_a^i dx^a \quad (3.55)$$

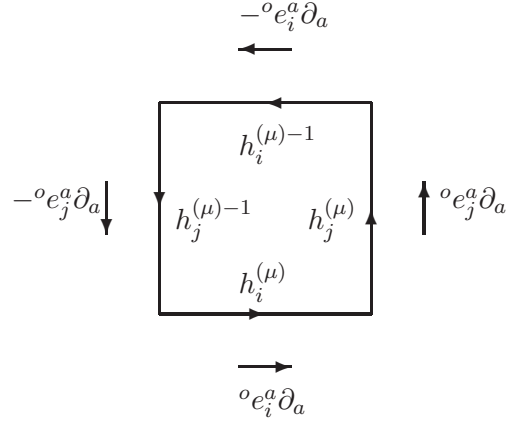
gdzie $2i\tau_i = \sigma_i$ a σ_i są macierzami Pauliego. Na podstawie tej definicji możemy policzyć wartość holonomii w kierunku ${}^o e_i^a \partial_a$ na odcinku $\mu V_0^{1/3}$

$$\begin{aligned} h_i^{(\mu)} &= \exp \int_0^{\mu V_0^{1/3}} \tau_i c V_0^{-1/3} \omega_a^i dx^a = \exp \tau_i \mu c \\ &= \mathbb{I} \cos\left(\frac{\mu c}{2}\right) + 2\tau_i \sin\left(\frac{\mu c}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Korzystając z takich elementarnych holonomii możemy policzyć wartość holonomii wzdłuż pętli $\square_{ij} \in \Sigma$

$$h_{\square_{ij}}^{(\mu)} = h_i^{(\mu)} h_j^{(\mu)} h_i^{(\mu)-1} h_j^{(\mu)-1}. \quad (3.57)$$

Zilustrowano to na diagramie poniżej.



3.2.3 Hamiltonian fenomenologiczny

Wykorzystamy teraz powyższy wynik aby wyprowadzić Hamiltonian fenomenologiczny. Będzie to klasyczny Hamiltonian zmodyfikowany przez kwantowe efekty dyskretyzacji przestrzeni. Nie będziemy więc prowadzić dalej rozważań czysto kwantowych lecz raczej semi-klasyczne. W takim podejściu z równań ruchu otrzymujemy informacje o wartościach średnich obserwabli kwantowych. Informacja o dyspersji stanu jest jednak niedostępna i wymaga w pełni kwantowej analizy.

Rozwijając wyrażenie (3.57) dostajemy

$$\begin{aligned}
 h_{\square_{ij}}^{(\mu)} &= h_i^{(\mu)} h_j^{(\mu)} h_i^{(\mu)-1} h_j^{(\mu)-1} \\
 &= e^{\mu V_0^{1/3} A_a {}^o e_i^a} e^{\mu V_0^{1/3} A_a {}^o e_j^a} e^{-\mu V_0^{1/3} A_a {}^o e_i^a} e^{-\mu V_0^{1/3} A_a {}^o e_j^a} \\
 &= \exp \left[\mu^2 V_0^{2/3} A_a^l A_b^m {}^o e_i^{a o} e_j^b [\tau_l, \tau_m] + \mathcal{O}(\mu^3) \right] \\
 &= \mathbb{I} + \mu^2 V_0^{2/3} F_{ab}^k \tau_k {}^o e_i^{a o} e_j^b + \mathcal{O}(\mu^3)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

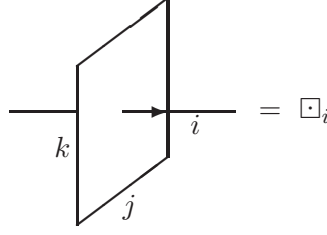
gdzie wykorzystaliśmy wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa oraz fakt, że dla płaskiego modelu FRW wyrażenie na krzywiznę koneksji redukuje się do $F_{ab}^k = \epsilon_{ij}^k A_a^i A_b^j$. Równanie (3.58) może być przepisane do postaci

$$F_{ab}^k = -2 \lim_{\text{Ar} \rightarrow 0} \frac{\text{tr} \left[\tau_k \left(h_{\square_{ij}}^{(\mu)} - \mathbb{I} \right) \right]}{\mu^2 V_0^{2/3}} {}^o \omega_a^i {}^o \omega_b^j. \tag{3.59}$$

Ślad w tym równaniu może być bezpośrednio wyliczony wykorzystując (3.56) dając

$$\text{tr} \left[\tau_k \left(h_{\square_{ij}}^{(\mu)} - \mathbb{I} \right) \right] = -\frac{\epsilon_{kij}}{2} \sin^2(\mu c). \quad (3.60)$$

Jednakże w LQG granica $Ar \rightarrow 0$ w równaniu (3.59) nie istnieje. Wynika to z faktu istnienia minimalnego, niezerowego kwantu powierzchni $\Delta = 2\sqrt{3}\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2$ [5, 6]. Wykonywanie granicy w równaniu (3.59) powinniśmy więc przerwać na minimalnej powierzchni Δ przecinanej przez pętle. Dla holonomii w kierunku ${}^o e_i^a \partial_a$ jest to powierzchnia \square_i , co przedstawiono na diagramie poniżej (gdzie $i = k \wedge j$).



Powierzchnia $Ar = \square_i$ powinna dla $Ar \rightarrow \Delta$ wiązać się z graniczną wartością długości krawędzi pętli $\mu = \bar{\mu}$. Musimy więc powiązać \square_i z μ . Możemy wybrać, aby \square_i odpowiadało fizycznej powierzchni powierzchni $a^2\mu^2$ lub powierzchni współrzędnościowej μ^2 . W przypadku $\square_i = V_0^{2/3} a^2 \mu^2 = |p| \mu^2$ otrzymujemy w granicy

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{|p|}}. \quad (3.61)$$

To podejście nazywamy schematem $\bar{\mu}$. W drugim przypadku kiedy $\square_i = |p_0| \mu^2$, gdzie p_0 odpowiada wartości własnej

$$\hat{p}|\mu_0\rangle = \mu_0 \frac{8\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{6} |\mu_0\rangle, \quad (3.62)$$

otrzymujemy w granicy

$$\bar{\mu} = \mu_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.63)$$

Podejście to nazywamy schematem μ_0 . Prowadzi ono jednak do niepoprawnej granicy klasycznej. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku schematu $\bar{\mu}$. W ogólności możemy jednak sparametryzować

$$\bar{\mu}(p) = \xi |p|^n \quad (3.64)$$

gdzie $n \in [-1/2, 0]$ oraz $\xi \in \mathbb{R}_+$. Przedział zmiennści paramateru n uzyskujemy z

rozważań tak zwanych stanów sieciowych [37]. Rozważmy mianowicie obszar V_0 zawierający sieć o średniej długości krawędzi wynoszącej l_0 . Liczba bloków sieciowych jest więc równa $\mathcal{N} = V_0/l_0^3$. Ta wielkość odpowiada wcześniej wprowadzonemu $\bar{\mu}$ poprzez relacje $\mathcal{N} = \bar{\mu}^{-3}(p)$. Podczas ewolucji wzrost objętości przestrzeni wynika ze wzrostu indeksów spinowych na krawędziach oraz z kreacji nowych werteksów. Jeśli dominuje ten pierwszy efekt to liczba bloków pozostaje stała podczas ewolucji, $\mathcal{N} = \text{const}$. W przeciwnym wypadku, kiedy indeksy spinowe nie ulegają zmianie, liczba werteksów skaluje się z objętością czyli $\mathcal{N} \propto |p|^{3/2}$. Ewolucja fizyczna odpowiada stanowi pośredniemu. Wykorzystując definicje \mathcal{N} uzyskujemy dopuszczalny przedział zmienności $n \in [-1/2, 0]$. Inny typ niejednoznaczności badany jest w pracach [38, 39].

Uwzględniając dyskretność przestrzeni i wstawiając wynik (3.60) do granicy (3.59) dostajemy

$$F_{ab}^k = \frac{\sin^2(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}^2 V_0^{2/3}} \epsilon_{kij} {}^o\omega_a^i {}^o\omega_b^j, \quad (3.65)$$

W przypadku klasycznym mielibyśmy

$$F_{ab}^k = \frac{c^2}{V_0^{2/3}} \epsilon_{kij} {}^o\omega_a^i {}^o\omega_b^j. \quad (3.66)$$

Na podstawie powyższych dwóch równań widzimy, że efekty kwantowe mogą być wprowadzone przez zamianę

$$c \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \quad (3.67)$$

w wyrażeniach klasycznych.

Klasyczny Hamiltonian (3.35) z uwzględnieniem poprawek od holonomii przyjmuje więc postać

$$H_{\text{eff}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 + \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\phi) \quad (3.68)$$

gdzie uwzględniliśmy też wkład od jednorodnego pola skalarnego. Korzystając z więzu Hamiltona $H_{\text{eff}} = 0$ oraz z równania Hamiltona

$$\dot{p} = \{p, H_{\text{eff}}\} = \frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{|p|}}{\bar{\mu}} \sin(\bar{\mu}c) \cos(\bar{\mu}c) \quad (3.69)$$

wyprowadzamy efektywne równanie Friedmanna

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{p}}{2p} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \left(1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_c} \right) \quad (3.70)$$

gdzie

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 l_{\text{Pl}}^4}. \quad (3.71)$$

oraz

$$\rho_\phi = \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^3} + V(\phi). \quad (3.72)$$

Równanie (3.70) prowadzi do nieosobliwej ewolucji kosmologicznej. Typowym jego rozwiązaniem jest tak zwany bounce, który minimum czynnika skali osiąga dla maksymalnej gęstości energii ρ_c .

4 Kosmologia pętlowo-strunowa: Rozważania analityczne

W dwóch poprzednich rozdziałach wprowadziliśmy opis wszechświata bazując kolejno na Teorii Strun oraz na Pętlowej Grawitacji Kwantowej. Każde z tych podejść cechowało się pewnymi szczególnie interesującymi własnościami. W przypadku kosmologii strunowej był to próżniowy stan początkowy. Z kolei w Pętlowej Kosmologii Kwantowej dostaliśmy dobry opis wysokoenergetycznej fazy wszechświata, którego brakowało w podejściu strunowym. W poniższym rozdziale zbadamy łączny efekt obu rozważanych podejść. Mianowicie do modelu strunowego włączymy dyskretność przestrzeni leżącą u podstaw kosmologii pętlowej.

4.1 Polimeryzacja kosmologii strunowej

Wprowadzenie efektów polimeryzacji przestrzeni do kosmologii strunowej wykonamy w układzie Einsteina przyjmując $B_{\mu\nu} = 0$. Rozważania będą bazować na zredukowanym działaniu (2.10), które w przypadku $B_{\mu\nu} = 0$ przyjmuje postać

$$S_{eff}^E = \int dt L = \frac{1}{2\kappa_4} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}\phi)^2 - V(\phi)e^\phi \right]. \quad (4.1)$$

gdzie zdefiniowaliśmy $\kappa_4 = 8\pi G_4$. Kolejnym krokiem będzie przejście do formalizmu Hamiltonowskiego, wykonując transformacje Legendre'a dla Lagrangianu L . Całkowity Hamiltonian jest sumą części grawitacyjnej \mathcal{H}_G oraz dylatonowej \mathcal{H}_ϕ . W języku zmiennych Ashtekara Hamiltonian grawitacyjny przyjmuje postać sumy więzów

$$\mathcal{H}_G = \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} (N^i G_i + N^a C_a + N h_{sc}), \quad (4.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} C_a &= E_i^b F_{ab}^i - (1 - \gamma^2) K_a^i G_i, \\ G_i &= D_a E_i^a \end{aligned} \quad (4.3)$$

oraz więz skalarny

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &:= \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} N(x) h_{sc} = \\ & \frac{1}{2\kappa_4} \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} N(x) \left(\frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \varepsilon^{ij}{}_{k} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} K_{[a}^i K_{b]}^j \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hamiltonian części dylatonowej przyjmuje postać

$$\mathcal{H}_{\tilde{\phi}} = \int_{\Sigma} d^3\mathbf{x} N(x) \left(\frac{1}{2} \frac{\pi_{\tilde{\phi}}^2}{\sqrt{|\det E|}} + \frac{1}{2} \frac{E_i^a E_j^b \partial_a \tilde{\phi} \partial_b \tilde{\phi}}{\sqrt{|\det E|}} + \sqrt{|\det E|} U(\tilde{\phi}) \right). \quad (4.5)$$

gdzie zdefiniowaliśmy

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{2\kappa_4}}, \quad (4.6)$$

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2\kappa_4} V(\phi) e^{\phi}. \quad (4.7)$$

W dalszej części będziemy rozważać modele z jednorodnym polem dylatonowym. W takim przypadku efektywny Hamiltonian w układzie Einsteina z uwzględnieniem poprawek od holonomii przyjmuje postać

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{3}{8\pi G_4 \gamma^2} \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi_{\tilde{\phi}}^2}{|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} U(\tilde{\phi}). \quad (4.8)$$

Hamiltonian ten ma taką samą postać jak (3.68). Właśnie ten fakt jest przyczyną dla której dokonaliśmy przejścia do układu Einsteina. Mianowicie w tym układzie rachunki są identyczne jak dla standardowej kosmologii pętlowej. Wprowadzanie efektów kwantowej polimeryzacji przestrzeni jest więc dobrze zdefiniowane.

Wykorzystując równanie Hamiltona $\dot{f} = \{f, \mathcal{H}_{\text{eff}}\}$ dostajemy układ równań na zmienne kanoniczne

$$\dot{p} = \{p, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} = \frac{2}{\gamma} \frac{\sqrt{|p|}}{\bar{\mu}} \sin(\bar{\mu}c) \cos(\bar{\mu}c), \quad (4.9)$$

$$\dot{c} = \{c, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 \right\} + \text{sgn}(p) \frac{\kappa_4 \gamma}{2} \left[-\frac{\pi_{\tilde{\phi}}^2}{2|p|^{5/2}} + \sqrt{|p|} U(\tilde{\phi}) \right],$$

$$\dot{\tilde{\phi}} = \{\tilde{\phi}, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} = |p|^{-3/2} \pi_{\tilde{\phi}}, \quad (4.10)$$

$$\dot{\pi}_{\tilde{\phi}} = \{\pi_{\tilde{\phi}}, \mathcal{H}_{\text{eff}}\} = -|p|^{3/2} \frac{dU(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} \quad (4.11)$$

gdzie pochodne wykonywane są względem czasu \tilde{t} .

4.2 Model bez potencjału

Jako pierwszy będziemy rozważać model bez potencjału dylatonowego. Model ten ma tą szczególną własność, że daje się on całkowicie analitycznie rozwiązać. Będzie on więc punktem odniesienia dla dalszych rozważań, gdzie rozwiązania analityczne nie będą osiągalne.

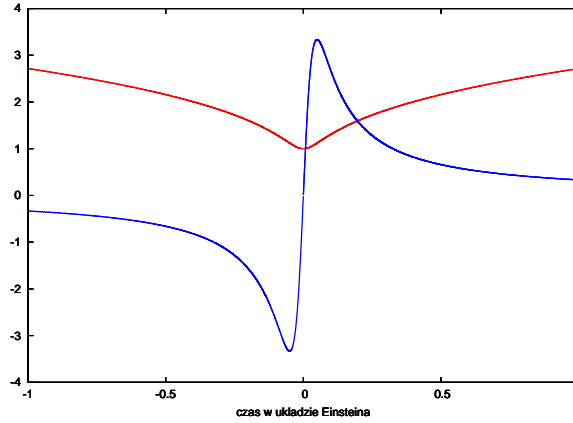
Na podstawie równania ruchu (4.9) oraz więzu Hamiltonowskiego $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$ łatwo znajdujemy rozwiązanie na zmienną kanoniczną

$$p(\tilde{t}) = \text{sgn}(p) \left[\frac{1}{6} \kappa_4 \pi^2 \gamma^2 \Delta + \frac{3}{2} \kappa_4 \pi^2 \tilde{t}^2 \right]^{1/3}. \quad (4.12)$$

Rozwiązanie to odpowiada zachowaniu typu bounce w układzie Einsteina. Na Rys. 4.1 pokazujemy ewolucję $p(\tilde{t})$ oraz ewolucję parametru Hubble'a

$$\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}. \quad (4.13)$$

Czynniki skali oraz czasy w układzie Einsteina i w układzie strunowym są połączone



Rysunek 4.1: Górna krzywa (czerwony) odpowiada ewolucji typu bounce dla $\tilde{a}(\tilde{t})$. Dolna krzywa (niebieski) przedstawia ewolucję parametru Hubble'a $\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$ w czasie \tilde{t} .

transformacją

$$a = e^{\phi/2} \tilde{a}, \quad (4.14)$$

$$dt = e^{\phi/2} d\tilde{t}, \quad (4.15)$$

która bezpośrednio zależy od wartości pola dylatonu. Dlatego, aby wykonać analizę ewolucji w układzie strunowym musimy wcześniej wyznaczyć ewolucję pola dylatonu

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{2\kappa_4} \tilde{\phi} = \sqrt{2\kappa_4} \int d\tilde{t} \frac{\pi_{\tilde{\phi}}}{|p|^{3/2}} \\ &= \sqrt{2\kappa_4} \frac{\pi_{\tilde{\phi}}}{\sqrt{\frac{3}{2}\kappa_4\pi_{\tilde{\phi}}^2}} \int \frac{d\tilde{t}}{\sqrt{\frac{1}{9}\gamma^2\Delta + \tilde{t}^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \operatorname{arcsch}\left(\frac{3\tilde{t}}{\gamma\sqrt{\Delta}}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

W zależności od wartości $\operatorname{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}})$ otrzymane rozwiązanie jest monotonicznie rosnącą lub malejącą funkcją \tilde{t} . W przypadku $\pi_{\tilde{\phi}} < 0$ nie otrzymujemy narodzin klasycznego wszechświata. Dlatego do dalszych rozważań wybieramy drugą możliwość $\pi_{\tilde{\phi}} > 0$. W tym przypadku $\phi(\tilde{t})$ jest monotonicznie rosnącą funkcją. Zachowanie tej funkcji razem z ewolucją gęstości energii

$$\rho_{\tilde{\phi}} = \frac{\dot{\tilde{\phi}}^2}{2} \quad (4.17)$$

przedstawiamy na Rys. 4.2. Ważną własnością tej ewolucji jest jej nieosobiwy charakter. Dla $\tilde{t} = 0$ gęstość energii osiąga maksymalną, skończoną wartość

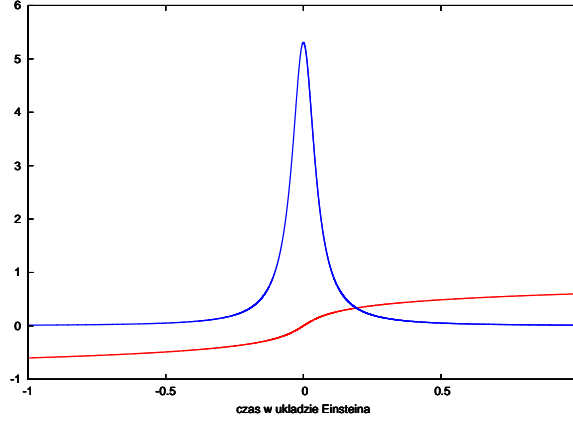
$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 G_4^2}. \quad (4.18)$$

Odpowiada to fazie gorącego Wielkiego Wybuchu który jest tutaj przejściowym nieosobliwym stanem.

Kolejną wielkością, którą możemy zbadać jest ewolucja stałej sprężenia

$$g_s^2 = \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \operatorname{arcsch}\left(\frac{3\tilde{t}}{\gamma\sqrt{\Delta}}\right)\right\}. \quad (4.19)$$

Funkcja ta gwałtownie maleje do zera dla ujemnych wartości czasu \tilde{t} prowadząc do asymptotycznego braku oddziaływań w fazie przed Wielkim Wybuchem. W fazie po Wielkim Wybuchu wartość stałej sprężenia g_s^2 rośnie monotonicznie. Jest to zachowanie raczej nie pożądane, ponieważ oczekujemy saturacji stałej sprężenia. W następnym rozdziale pokażemy, że uwzględnienie potencjału dylatonowego może prowadzić do stabilizacji pola dylatonu.

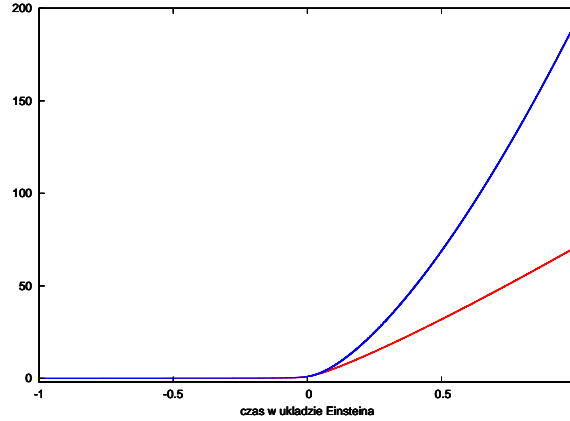


Rysunek 4.2: Monotoniczna (czerwona) krzywa przedstawia ewolucję pola dylatonu $\tilde{\phi}(\tilde{t})$. Wypikowana (niebieska) krzywa pokazuje zależność czasową \tilde{t} dla gęstości energii $\rho_{\tilde{\phi}} = \dot{\tilde{\phi}}^2/2$.

Ewolucja czynnika skali w układzie strunowym przybiera postać

$$a = V_0^{-1/3} \exp \left\{ \frac{\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}})}{\sqrt{3}} \text{arcsinh} \left(\frac{3\tilde{t}}{\gamma\sqrt{\Delta}} \right) \right\} \left[\frac{1}{6} \kappa \pi_{\tilde{\phi}}^2 \gamma^2 \Delta + \frac{3}{2} \kappa \pi_{\tilde{\phi}}^2 \tilde{t}^2 \right]^{1/6}. \quad (4.20)$$

Tą zależność razem z $g_s^2(\tilde{t})$ przedstawiamy na Rys. 4.3. Dla $\tilde{t} \rightarrow -\infty$ czynnik skali $a(\tilde{t})$ dąży do zera. Ta faza może być interpretowana jako stan próżni bez oddziaływań i ze znikającą gęstością energii. Warto podkreślić, że jest to stan klasyczny a efekty kwantowe stają się istotne tylko w pobliżu przejściowej fazy Wielkiego Wybuchu.



Rysunek 4.3: Górna krzywa (niebieska) przedstawia ewolucję czynnika skali $a(\tilde{t})$. Dolna krzywa (czerwona) pokazuje zależność g_s^2 od czasu \tilde{t} .

Powyższe rozważania były prowadzone w czasie \tilde{t} . Możemy jednak wrócić do czasu t przez całkowanie

$$\begin{aligned} t &= \int d\tilde{t} \exp \left\{ \frac{\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}})}{\sqrt{3}} \text{arcsch} \left(\frac{3\tilde{t}}{\gamma\sqrt{\Delta}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[3\tilde{t} - \frac{\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}})}{\sqrt{3}} \sqrt{\gamma^2\Delta + 9\tilde{t}^2} \right] \exp \left\{ \frac{\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}})}{\sqrt{3}} \text{arcsch} \left(\frac{3\tilde{t}}{\gamma\sqrt{\Delta}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Jest to monotonicznie rosnąca funkcja czasu \tilde{t} . Jakościowe wyniki w czasie t oraz \tilde{t} są więc równoważne.

Rozważając asymptotyki równań (4.20) oraz (4.21) dostajmy

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \approx t^{0.577} \quad (4.22)$$

dla $t \gg 0$. Asymptotyczne zachowanie dla pola dylatonu ma postać

$$\phi(t) \propto \ln(t). \quad (4.23)$$

Pole dylatonu nie ulega więc w tym modelu stabilizacji dla późnych czasów. Prowadzi to do ewolucji czasowej stałej sprzężenia, która asymptotycznie zachowuje się jak

$$g_s^2 \propto t^{\sqrt{3}-1} \approx t^{0.732}. \quad (4.24)$$

4.3 Model z potencjałem $V(\phi) = V_0 e^{-\phi}$

W tym podrozdziale zajmiemy się modelem z potencjałem dylatonowym w postaci

$$V(\phi) = V_0 e^{-\phi}. \quad (4.25)$$

Wybór ten nie jest przypadkowy. Mianowicie przy takim wyborze otrzymujemy stały potencjał dylatonowy w układzie Einsteina

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2\kappa_4} V(\phi) e^{\phi} = \frac{V_0}{2\kappa_4} = \frac{\Lambda_E}{\kappa_4}. \quad (4.26)$$

Potencjał ten zachowuje się w układzie Einsteina jak stała kosmologiczna Λ_E . Efektywny Hamiltonian przybiera więc postać

$$H_{\text{eff}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{p_{\tilde{\phi}}^2}{|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} \frac{\Lambda_E}{8\pi G}. \quad (4.27)$$

Podobnie jak we wcześniejszych rozważaniach, biorąc równanie Hamiltona $\dot{p} = \{p, \mathcal{H}_{\text{eff}}\}$ oraz więz Hamiltona $\mathcal{H}_{\text{eff}} = 0$ dostajemy równanie

$$\left(\frac{dp}{d\tilde{t}}\right)^2 = \gamma_{\text{I}}|p|^2 + \gamma_{\text{II}}|p|^{-1} - \gamma_{\text{III}}|p|^{-4} \quad (4.28)$$

gdzie parametry są zdefiniowane jako

$$\gamma_{\text{I}} = \frac{4}{3}\Lambda_E \left[1 - \frac{\Lambda_E}{3}\gamma^2\Delta\right], \quad (4.29)$$

$$\gamma_{\text{II}} = \frac{2}{3}\kappa_4\pi_{\phi}^2 \left[1 - 2\frac{\Lambda_E}{3}\gamma^2\Delta\right], \quad (4.30)$$

$$\gamma_{\text{III}} = \frac{1}{9}\kappa_4^2\gamma^2\Delta\pi_{\phi}^4. \quad (4.31)$$

Aby rozwiązać równanie (4.28) reparametryzujemy zmienną czasową

$$d\tilde{t} = |p(u)|^3 du \quad (4.32)$$

oraz wprowadzamy nową zmienną

$$y(u) = |p(u)|^3. \quad (4.33)$$

Ta reparametryzacja zmiennych prowadzi do równania

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 9\gamma_{\text{I}}y^2(y - y_1)(y - y_2) \quad (4.34)$$

gdzie

$$y_1 = \frac{1}{6} \frac{\kappa_4\pi_{\phi}^2\gamma^2\Delta}{\left[1 - \frac{\Lambda_E}{3}\gamma^2\Delta\right]}, \quad (4.35)$$

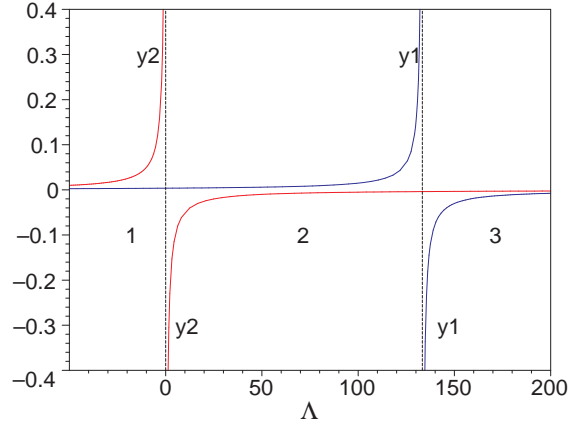
$$y_2 = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_4\pi_{\phi}^2}{\Lambda_E}. \quad (4.36)$$

Mamy trzy możliwe typy rozwiązań równania (4.34) w zależności od wartości para-

metrów (γ_1, y_1, y_2) . Podsumowujemy te możliwości w poniższej tabelce.

	1	2	3
Λ_E	< 0	> 0	> 0
$1 - \frac{\Lambda}{3}\gamma^2\Delta$	> 0	> 0	< 0
γ_1	< 0	> 0	< 0
y_1	> 0	> 0	< 0
y_2	> 0	< 0	< 0

Warto zauważyć, że iloczyn $\Upsilon \equiv \gamma_1 \cdot y_1 \cdot y_2 = -12 \frac{\alpha^2}{\Lambda_0}$ jest ujemny dla wszystkich trzech przypadków (Zdefiniowaliśmy tu $\Lambda_0 = \frac{3}{\gamma^2\Delta}$ oraz $\alpha = \kappa_4 \pi^2 / 6$). Ta własność będzie przydatna przy rozwiązywaniu równania (4.34). Na Rys. 4.4 pokazujemy wartości pierwiastków y_1 oraz y_2 w funkcji Λ_E . Widzimy, że istnieją dwie wartości Λ_E dla



Rysunek 4.4: Wartości parametrów y_1, y_2 w funkcji Λ_E . Obszar 1 odpowiada rozwiązaniom oscylującym, obszar 2 zawiera rozwiązania typu bounce. Obszar 3 nie zawiera rozwiązań fizycznych. Wartość parametru Λ_E jest wyrażona w jednostkach $[1/G_4]$.

których pierwiastki zmieniają swój znak, mianowicie $\Lambda_E = 0$ oraz

$$\Lambda_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma^3 G_4} = 133.4 G_4^{-1} \quad (4.38)$$

gdzie użyliśmy wartości $\gamma = \ln 2 / (\pi\sqrt{3})$ policzonej w pracy [9]. Współczesniejsze badania wskazują jednak, że wartość parametru γ może być inna i zawierać się w przedziale $\ln 2/\pi \leq \gamma \leq \ln 3/\pi$ [40]. W szczególności Meissner wyznaczył $\gamma_M = 0.12738$ [41]. Jednakże ta swoboda wyboru γ nie wpływa na wyniki jakościowe. Przesuwany jest

jedynie obszar w przestrzeni parametrów odpowiadający danemu typowi ruchu.

Wykonujemy teraz zmianę zmiennych w równaniu (4.34) w postaci

$$w(u) = \frac{1}{y(u)} \quad (4.39)$$

oraz

$$\chi = 3\sqrt{|\Upsilon|}u. \quad (4.40)$$

Wprowadzamy także parametry

$$w_1 = \frac{1}{y_1}, \quad w_2 = \frac{1}{y_2} \quad (4.41)$$

co pozwala nam przepisać równanie (4.34) do postaci

$$\left(\frac{dw}{d\chi}\right)^2 + (w_1 - w)(w_2 - w) = 0. \quad (4.42)$$

Równanie (4.42) jest równoważne równaniu dla przesuniętego oscylatora harmonicznego i ma rozwiązanie postaci

$$w(\chi) = \frac{\Lambda_0}{6\alpha} \left[1 - 2\frac{\Lambda_E}{\Lambda_0} + \cos(\chi) \right]. \quad (4.43)$$

gdzie przyjęliśmy stałą całkowania równą zeru.

Wracając do zmiennych wyjściowych dostajemy

$$p(u) = \operatorname{sgn}(p) \frac{\sqrt[3]{\frac{6\alpha}{\Lambda_0}}}{\sqrt[3]{1 - 2\frac{\Lambda_E}{\Lambda_0} + \cos\left(3\sqrt{|\Upsilon|}u\right)}}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{t}(u) = \int_0^u du' p^3(u'). \quad (4.45)$$

Całka (4.45) może być z łatwością policzona, a jej wartości zależą od parametrów w równaniu (4.44). Definiujemy więc analityczną całkę ogólnej postaci

$$I(x, a) = \int_0^x \frac{dx'}{a + \cos x'} \quad (4.46)$$

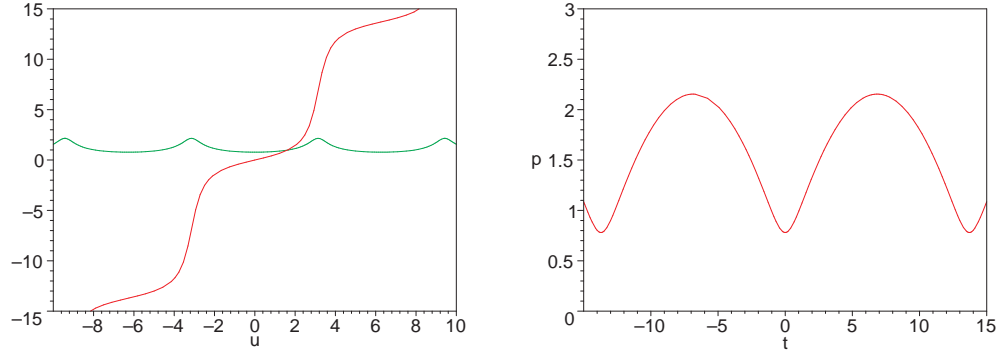
za pomocą której wyrażenie (4.45) może być zapisane jako

$$\tilde{t}(u) = \frac{1}{3\sqrt{|\Upsilon|}} I\left(3\sqrt{|\Upsilon|}u, 1 - 2\frac{\Lambda_E}{\Lambda_0}\right). \quad (4.47)$$

Wartości całki (4.46) w zależności od parametru a mają postać

$$\begin{aligned}
 I(x, |a| > 1) &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \left[\frac{(a - 1) \tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{a^2 - 1}} \right] \\
 I(x, a = 1) &= \tan \left(\frac{x}{2} \right) \\
 I(x, 0 < |a| < 1) &= -\frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arctanh} \left[\frac{(a - 1) \tan \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{1 - a^2}} \right] \\
 I(x, a = 0) &= \ln \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)
 \end{aligned}$$

Na Rys. 4.5 pokazujemy rozwiązanie dla $\Lambda_E < 0$, czyli równoważnie dla $a > 1$. Na Rys. 4.6 pokazujemy rozwiązanie dla $0 < \Lambda_E < \Lambda_0$ co odpowiada $0 < |a| < 1$.

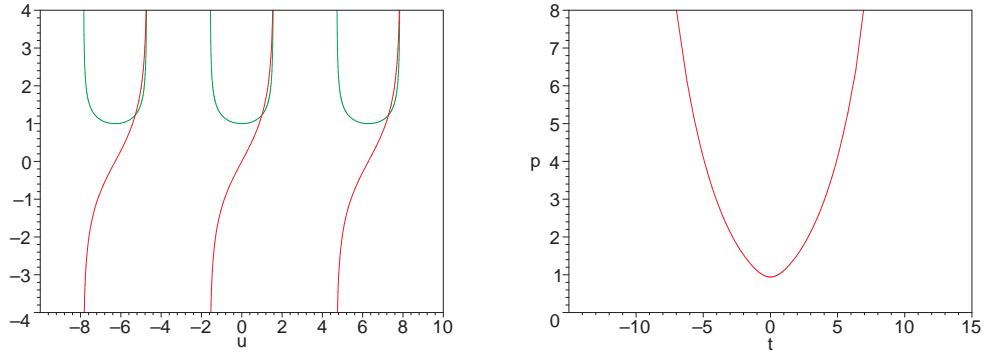


Rysunek 4.5: **Lewa** : Rozwiązanie parametryczne dla przypadku $\Lambda_E < 0$. Oscylująca krzywa (zielona) przedstawia $|p(u)|$ a monotonicznie rosnąca (czerwona) krzywa odpowiada $\tilde{t}(u)$. **Prawa** : Rozwiązanie $|p(\tilde{t})|$ dla $\Lambda_E < 0$. Kanoniczna zmienna p jest wyrażona w jednostkach $[G_4]$ natomiast \tilde{t} w $[\sqrt{G_4}]$.

4.3.1 $\Lambda_E = \frac{1}{2}\Lambda_0$

Skoncentrujemy teraz naszą uwagę na modelu z $\Lambda_E = \frac{1}{2}\Lambda_0$. W takim przypadku mamy

$$p(u) = \operatorname{sgn}(p) \frac{\sqrt[3]{\frac{6\alpha}{\Lambda_0}}}{\sqrt[3]{\cos \left(3\sqrt{|\Upsilon|}u \right)}} \quad (4.48)$$



Rysunek 4.6: **Lewa** : Rozwiązanie parametryczne dla $0 < \Lambda_E < \Lambda_0$. Górna (zielona) krzywa przedstawia $|p(u)|$ natomiast dolna (czerwona) krzywa odpowiada $\tilde{t}(u)$. **Prawa** : Funkcja $|p(\tilde{t})|$ dla przypadku $0 < \Lambda_E < \Lambda_0$. Kanoniczna zmienna p jest wyrażona w jednostkach $[G_4]$ natomiast \tilde{t} w $[\sqrt{G_4}]$.

oraz

$$\tilde{t}(u) = \frac{1}{3\sqrt{|\Upsilon|}} \ln \left[\frac{1}{\cos(3\sqrt{|\Upsilon|}u)} - \tan(3\sqrt{|\Upsilon|}u) \right]. \quad (4.49)$$

Odwracając to równanie dostajemy

$$\sin(3\sqrt{|\Upsilon|}u) = -\tanh(3\sqrt{|\Upsilon|}\tilde{t}) \quad (4.50)$$

a następnie wstawiając do (4.48) otrzymujemy

$$p(\tilde{t}) = \text{sgn}(p) \sqrt[3]{\frac{6\alpha}{\Lambda_0} \cosh(3\sqrt{|\Upsilon|}\tilde{t})}. \quad (4.51)$$

Jest to rozwiązanie typu bounce w układzie Einsteina. Będziemy teraz chcieli wyznaczyć ewolucję pola dylatonu, a następnie ewolucję czynnika skali w układzie strunowym. Ewolucja dylatonu wyznaczana jest na podstawie

$$\phi = \sqrt{2\kappa_4} \tilde{\phi} = \sqrt{2\kappa_4} \int d\tilde{t} \frac{\pi \tilde{\phi}}{|p|^{3/2}}. \quad (4.52)$$

Wyrażenie to prościej wyrazić przychodząc najpierw do zmiennej u . Roźniczkując równanie (4.49) dostajemy

$$d\tilde{t} = -\frac{du}{\cos(3\sqrt{|\Upsilon|}u)} \quad (4.53)$$

co wstawiając do (4.52) daje całkę eliptyczną

$$\phi = -\pi_{\tilde{\phi}} \sqrt{\frac{\kappa_4 \Lambda_0}{2\alpha}} \int \frac{du}{\sqrt{\cos\left(3\sqrt{|\Upsilon|}u\right)}} = -\pi_{\tilde{\phi}} \sqrt{\frac{\kappa_4 \Lambda_0}{2\alpha}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - 2\sin^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{|\Upsilon|}u\right)}}.$$

Ewolucję pola dylatonu można wyrazić przez funkcję eliptyczną pierwszego rodzaju zdefiniowaną jako

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.55)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\phi(\tilde{t}) = -2\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3|\Upsilon|}} F\left[-\frac{1}{2}\arcsin \tanh\left(3\sqrt{|\Upsilon|\tilde{t}}\right), \sqrt{2}\right]. \quad (4.56)$$

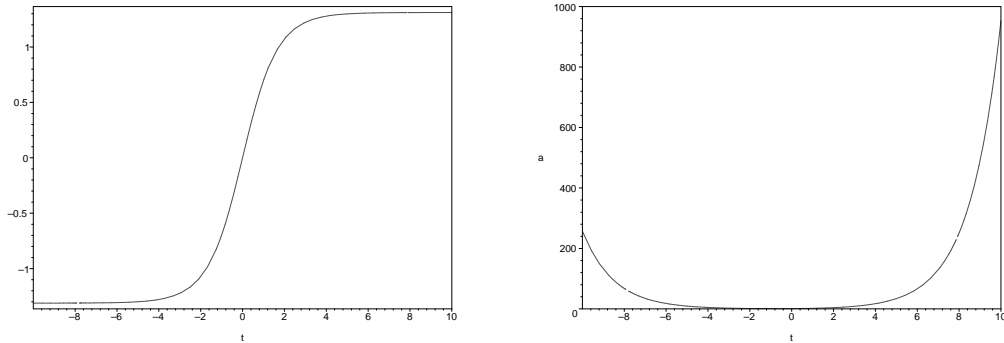
Stąd ewolucja stałej sprzężenia ma postać

$$g_s^2 = \exp\left\{-2\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3|\Upsilon|}} F\left[-\frac{1}{2}\arcsin \tanh\left(3\sqrt{|\Upsilon|\tilde{t}}\right), \sqrt{2}\right]\right\} \quad (4.57)$$

a czynnika skali

$$a = a_0 \left(\frac{6\alpha}{\Lambda_0} \cosh\left(3\sqrt{|\Upsilon|\tilde{t}}\right)\right)^{\frac{1}{6}} \exp\left\{-\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3|\Upsilon|}} F\left[-\frac{1}{2}\arcsin \tanh\left(3\sqrt{|\Upsilon|\tilde{t}}\right), \sqrt{2}\right]\right\}.$$

Na Rys. 4.7 przedstawiono ewolucje pola dylatonu ϕ oraz czynnika skali a w czasie \tilde{t} .



Rysunek 4.7: **Lewa** : Ewolucja pola ϕ w czasie \tilde{t} . **Prawa** : Ewolucja czynnika skali a w czasie \tilde{t} .

Jak widać, pole dylatonu ulega stabilizacji zarówno dla $\tilde{t} \rightarrow \infty$ jak i dla $\tilde{t} \rightarrow -\infty$. Stała sprężenia g_s^2 ulega więc saturacji. Umotywujemy teraz tą obserwację wynikiem analitycznym. Wygodne będzie tu wprowadzenie nowej zmiennej θ w następujący sposób

$$\sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} \right) \quad (4.59)$$

gdzie $x = 3\sqrt{|\Upsilon|}u$. Przedziałowi zmienności $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ odpowiada $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. W nowej zmiennej wyrażenie (4.56) przybiera postać

$$\phi(\tilde{t}) = -\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{|\Upsilon|}} F \left[\theta(\tilde{t}), \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (4.60)$$

gdzie

$$\theta(\tilde{t}) = \arcsin \left\{ \sqrt{2} \sin \left[-\frac{1}{2} \arcsin \tanh \left(3\sqrt{|\Upsilon|\tilde{t}} \right) \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Powyższą transformację wykonaliśmy aby otrzymać $k = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ co spełnia definicje funkcji eliptycznej $0 < k < 1$. Będziemy więc dalej mogli korzystać z wyników dla funkcji eliptycznych, które nie są dotępne dla poprzedniego przypadku $k = \sqrt{2} > 1$.

Na podstawie (4.61) dostajemy graniczne wartości

$$\tilde{t} \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad (4.62)$$

$$\tilde{t} \rightarrow -\infty \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}. \quad (4.63)$$

Dostajemy więc

$$\phi(\tilde{t} \rightarrow \pm\infty) = -\text{sgn}(\pi_{\tilde{\phi}}) \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{|\Upsilon|}} F \left[\mp \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (4.64)$$

co dla $\pi_{\tilde{\phi}} > 0$ daje

$$\phi(\tilde{t} \rightarrow \pm\infty) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{|\Upsilon|}} F \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \quad (4.65)$$

Wykorzystamy teraz własności funkcji $K(k)$ zdefiniowanej jako

$$K(k) = F \left(\frac{\pi}{2}, k \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.66)$$

Może być ona równoważnie zapisana w postaci szeregu

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right]^2 k^{2n} \quad (4.67)$$

lub wyrażona przez funkcję hipergeometryczną

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k \right). \quad (4.68)$$

Dla rozważanego przypadku $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dostajemy

$$K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^2}{4\sqrt{\pi}}. \quad (4.69)$$

Stąd graniczne wartości pola ϕ przyjmują wartości

$$\phi(\tilde{t} \rightarrow \pm\infty) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{|\Upsilon|}} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^2}{4\sqrt{\pi}}. \quad (4.70)$$

Stała sprzężenia dąży więc do

$$\bar{g}_s^2 := \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} g_s^2 = \exp \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\Lambda_0}{|\Upsilon|}} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^2}{4\sqrt{\pi}} \right\}. \quad (4.71)$$

Zachowanie to prowadzi do asymptotycznej ewolucji de Sittera

$$a(t) \propto \exp(H_0 t) \quad (4.72)$$

gdzie

$$H_0 = \frac{1}{2\bar{g}_s} \sqrt{|\Upsilon|}. \quad (4.73)$$

5 Kosmologia pętlowo-strunowa: Rozważania numeryczne

Nasze dotychczasowe rozważania modeli pętlo-strunowych dotyczyły szczególnych przypadków dla których istniały jawne rozwiązania. W modelu bez potencjału nie otrzymaliśmy stabilizacji pola dylatonu. Prowadziło to w rezultacie do monotonicznego wzrostu stałej sprężenia w fazie wszechświata po Wielkim Wybuchu. Jak jednak pokazaliśmy, obecność potencjału eksponencjalnego może prowadzić do stabilizacji pola i w rezultacie saturacji stałej sprężenia. W poniższym rozdziale będziemy kontynuować konstruowanie modeli, w których realizowana jest stabilizacja dylatonu. Rozważania te będą się opierać na analizie numerycznej. Jest to niezbędne ze względu na nieanalityczność rozważanego modelu. Skonstruujemy też i zbadamy model kolizji bran z efektami polimeryzacji przestrzeni.

5.1 Równania ruchu

Dla obliczeń numerycznych wygodnie jest przepisać układ równań (4.9-4.11) do postaci

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} = \kappa_4 \frac{P^2}{2} \left[\frac{2}{\rho_c} \left(\frac{P^2}{2} + U(\tilde{\phi}) \right) - 1 \right], \quad (5.1)$$

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \tilde{H}\tilde{a}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}} = P, \quad (5.3)$$

$$\frac{dP}{d\tilde{t}} = -3\tilde{H}P - \frac{dU(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}}, \quad (5.4)$$

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \exp \left(\sqrt{\frac{\kappa_4}{2}} \tilde{\phi} \right). \quad (5.5)$$

Ostatnie równanie odpowiada transformacji czasu z układu Einsteina do układu strunowego.

5.2 Model z potencjałem $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$

Rozważmy model z potencjałem dylatonowym ogólnej postaci

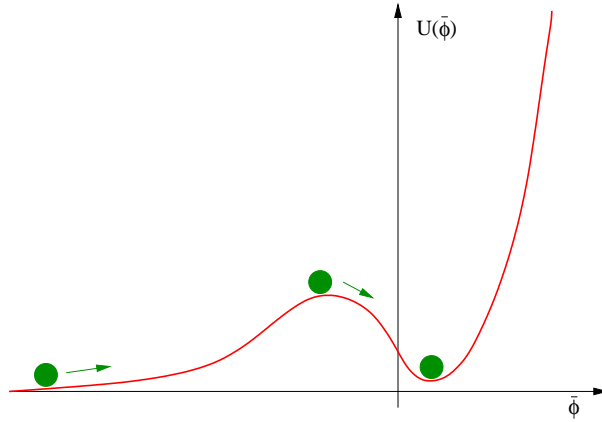
$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}(\phi - \phi_0)^2 + V_0. \quad (5.6)$$

W takim przypadku efektywny potencjał w układzie Einsteina przyjmuje postać

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{m^2}{2}(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0)^2 e^{\sqrt{2\kappa}\tilde{\phi}} + \tilde{V}_0 e^{\sqrt{2\kappa}\tilde{\phi}}. \quad (5.7)$$

Potencjał ten razem z możliwą ścieżką ewolucyjną pola $\tilde{\phi}$ przedstawiono na Rys. 5.8. Dynamika pola $\tilde{\phi}$ wyznaczana jest z równania ruchu

$$\ddot{\tilde{\phi}} + 3\tilde{H}\dot{\tilde{\phi}} + \frac{dU(\tilde{\phi})}{d\tilde{\phi}} = 0. \quad (5.8)$$



Rysunek 5.1: Rozważany scenariusz ewolucyjny pola dylatonu $\tilde{\phi}$ w efektywnym potencjale $U(\tilde{\phi})$.

Potencjał $U(\tilde{\phi})$ posiada dwa minima lokalne, jedno dla $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0$ i drugie dla $\tilde{\phi} \rightarrow -\infty$. Wyobraźmy sobie scenariusz, w którym pole zaczyna swoją ewolucję z asymptotycznie swobodnego stanu $\tilde{\phi} \rightarrow -\infty$, $g_s^2 \rightarrow 0$. W tym stanie czynnik skali $a \rightarrow 0$ również gęstość energii $\rho \rightarrow 0$. W tym samym czasie w układzie Einsteina czynnik skali maleje prowadząc do ujemnej wartości parametru Hubble'a. Dynamika pola skalarnego może być wtedy w przybliżeniu wyznaczona z $\ddot{\tilde{\phi}} + 3\tilde{H}\dot{\tilde{\phi}} \approx 0$. Następnie gęstość energii rośnie, a pole dylatonu osiąga szczyt góryk potencjału po czym spada do minimum potencjału. Ten etap odpowiada fazie Wielkiego Wybuchu, w którym gęstość energii

osiąga wartość maksymalną. Kiedy pole spadnie do minimum potencjału zaczyna oscylować. Oscylacje te są jednak tłumione ze względu na dodatnią wartość \tilde{H} w tej fazie. Znaczący to, że nieosobliwy Wielki Wybuch w układzie strunowym odpowiada fazie bounce w układzie Einsteina.

W tym podrozdziale zbadamy ten scenariusz numerycznie dla przypadku $\phi_0 = 0$ oraz $V_0 = 0$. Lokalne maximum dla tego potencjału znajduje się w

$$\tilde{\phi}_{\max} = -\sqrt{\frac{2}{\kappa_4}} \quad (5.9)$$

co daje

$$U(\tilde{\phi}_{\max}) = \frac{m^2}{\kappa_4} \frac{1}{e^2}. \quad (5.10)$$

Ponieważ dla ewolucji fizycznej $\rho \leq \rho_c$ dostajemy warunek

$$m^2 \leq \frac{\sqrt{3}e^2}{2\pi\gamma^3 G_4} \quad (5.11)$$

który musi być spełniony, aby pole $\tilde{\phi}$ mogło przejść przez górkę potencjału i następnie osiąść w minimum lokalnym dla $\tilde{\phi} = 0$. Dla $\gamma_M = 0.12738$ [41] daje to

$$m^2 \leq \frac{985,5}{G_4}. \quad (5.12)$$

Dalej rozważymy model z $m = 25/\sqrt{G_4}$. Ustalimy też następujące warunki początkowe

$$\tilde{\phi}(\tilde{t} = 0) = \tilde{\phi}_{\max}, \quad (5.13)$$

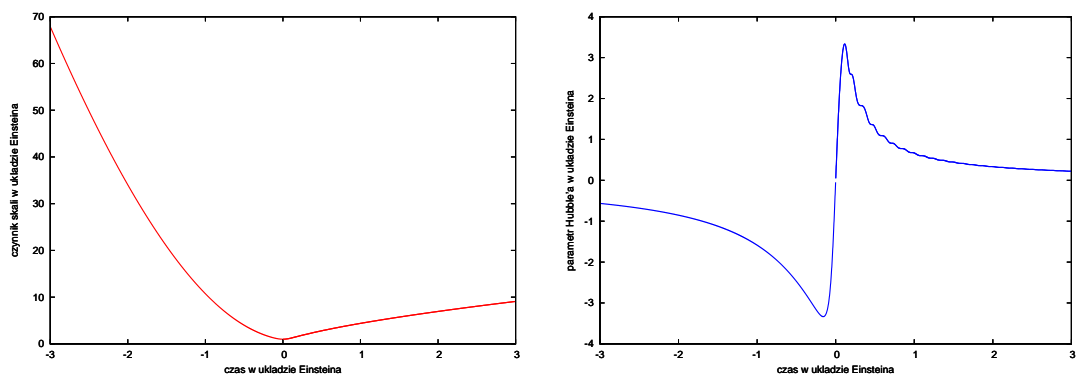
$$\tilde{a}(\tilde{t} = 0) = 1.0, \quad (5.14)$$

$$\rho(\tilde{t} = 0) = \rho_c, \quad (5.15)$$

$$t(\tilde{t} = 0) = 0.0. \quad (5.16)$$

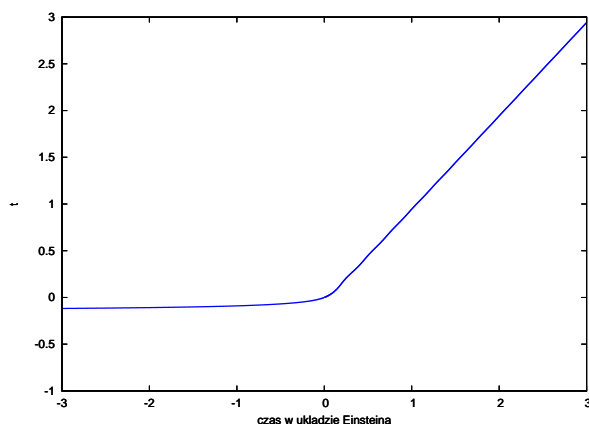
Rozwiązania numeryczne uzyskano wykorzystując algorytm Rungego-Kutty. Kod programu napisanego w języku C załączono w Dodatku 7.3.

Na Rys. 5.2 przedstawiono wyliczoną ewolucję czynnika skali oraz parametru Hubble'a w układzie Einsteina. Zachowanie tych parametrów jest podobne tego w przypadku bez potencjału. Złamana jest jednak symetria czasowa dla ewolucji czynnika skali. Rys. 5.3 przedstawia zależność pomiędzy czasem w układzie strunowym a czasem w układzie Einsteina. Jak widać, dla dodatnich czasów zależność ta jest liniowa. Wynika to z faktu ustalenia się pola dylatonu, które odpowiada za transformację pomiędzy czasami. Dla ujemnych czasów, kiedy pole dylatonu przyjmuje ujemne war-



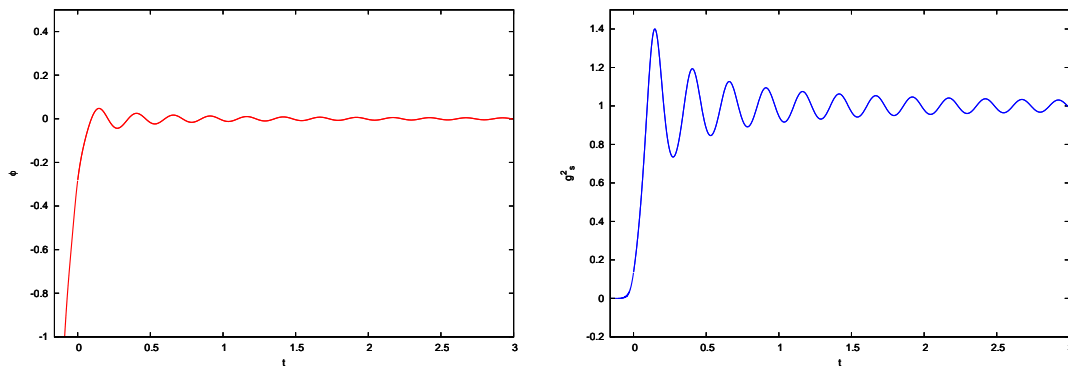
Rysunek 5.2: **Lewa** : Ewolucja czynnika skali w układzie Einsteina. **Prawa** : Ewolucja parametru Hubble'a w układzie Einsteina.

tości, ewolucja w układzie strunowym jest znacząco wolniejsza niż w układzie Einsteina. Rys. 5.4 przedstawia ewolucję pola dylatonu oraz ewolucję stałej sprzężenia g_s^2 . Jak

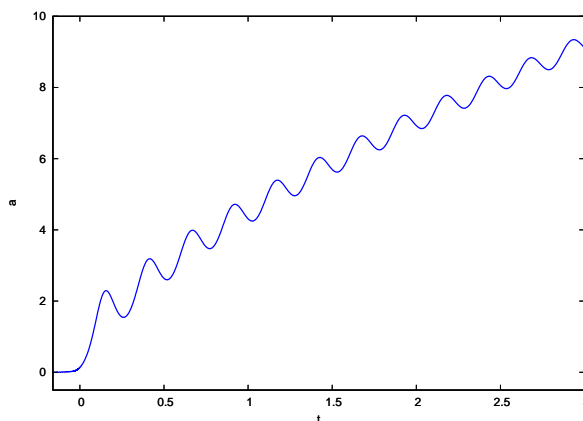


Rysunek 5.3: Zależność pomiędzy czasem w układzie strunowym a czasem w układzie Einsteina.

spodziewaliśmy się pole dylatonu po wpadnięciu do dołka potencjału ulega gasnącym oscylacjom wokół $\phi = 0$. Prowadzi to do saturacji stałej sprzężenia, która zbiega się do $g_s^2 \rightarrow 1$. Na Rys. 5.5 przedstawiono ewolucję czasową czynnika skali w układzie strunowym. W małych skalach czasowych ewolucja ta podlega oscylacjom wynikającym z ruchu pola dylatonu w dołku potencjału. Średnio jest to jednak ewolucja jak dla wszechświata wypełnionego pyłem z równaniem stanu $p_\phi = w\rho_\phi$ gdzie $\langle w \rangle = 0$. Rys. 5.6 przedstawia ewolucję parametru w w powyższym równaniu stanu oraz ewolucję gęstości energii pola ρ_ϕ



Rysunek 5.4: **Lewa** : Ewolucja pola ϕ w czasie t . **Prawa** : Ewolucja czasowa stałej sprzężenia g_s^2 .



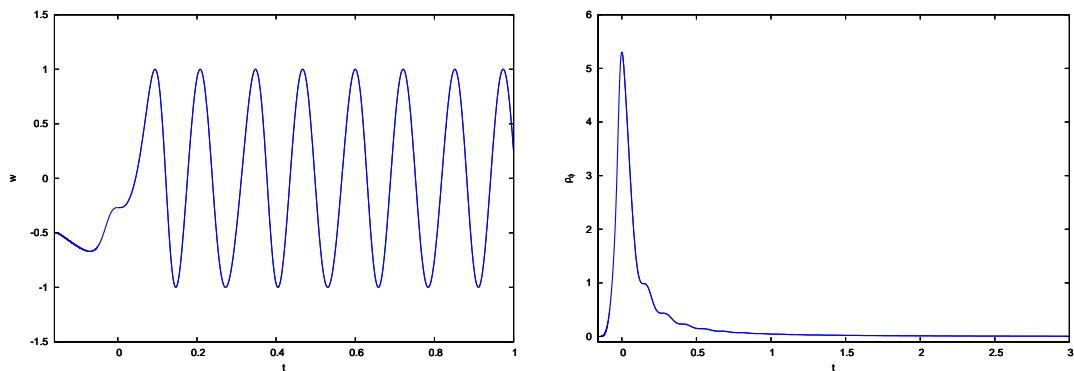
Rysunek 5.5: Ewolucja czasowa czynnika skali w układzie strunowym $a(t)$.

5.3 Model z potencjałem $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + V_0$

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy model który prowadził do wyjściowej klasycznej ewolucji z równaniem stanu $p_\phi = w\rho_\phi$ gdzie $\langle w \rangle = 0$. Poniżej zmodyfikujemy nieznacznie potencjał biorąc $V_0 > 0$, więc

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + V_0. \quad (5.17)$$

Jak łatwo zauważyć, efekty wkładu od V_0 są istotne tylko w pobliżu $\tilde{\phi} = 0$. Taka modyfikacja dla $V_0 < U(\tilde{\phi}_{\max})$ nie zmienia jakościowego zachowania pola $\tilde{\phi}$. Pole stabilizuje się jak w poprzednim przypadku prowadząc do $g_s^2 \rightarrow \text{const}$. Istotnej zmiany ulega jednak ewolucja czynnika skali w układzie strunowym dla fazy po Wielkim



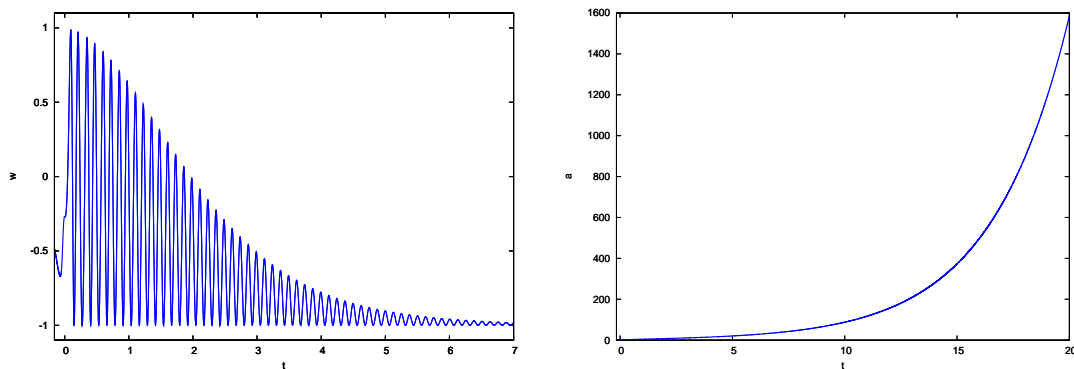
Rysunek 5.6: **Lewa** : Ewolucja parametru w w równaniu stanu $p_\phi = w\rho_\phi$. **Prawa** : Ewolucja gęstości energii pola ρ_ϕ .

Wybuchu. Mianowicie dostajemy w tym przypadku $w \rightarrow -1$, co wynika z faktu że w dołku potencjału pole jest tłumione prowadząc do

$$w = \frac{\frac{\dot{\tilde{\phi}}^2}{2} - U(\tilde{\phi})}{\frac{\dot{\tilde{\phi}}^2}{2} + U(\tilde{\phi})} \rightarrow \frac{-U(\tilde{\phi}_0)}{+U(\tilde{\phi}_0)} = -\frac{V_0}{V_0} = -1. \quad (5.18)$$

Równanie stanu $p_\phi = w\rho_\phi$ z $w = -1$ prowadzi do wyjściowej eksponencjalnej ewolucji czynnika skali. Odpowiada to kosmologicznej fazie de Sittera.

Opisany scenariusz potwierdzono numerycznie. Na Rys. 5.7 przedstawiono ewolucję parametru w oraz czynnika skali dla przypadku $V_0 = 0.01/G_4^2$



Rysunek 5.7: **Lewa** : Ewolucja parametru w w równaniu stanu $p_\phi = w\rho_\phi$. **Prawa** : Ewolucja czynnika skali w układzie strunowym.

5.4 Polimeryzacja kolizji bran

W tym podrozdziale będziemy rozważać model kolizji bran uwzględniający efekty polimeryzacji przestrzeni. Będziemy koncentrować się na tak zwanym modelu cyklicznym. Efekty pętlowe w tym modelu były badane w pracy Bojowalda, Maartensa i Singha [25]. Kwantowo-grawitacyjne efekty wprowadzili oni poprzez operator odwrotnej objętości. Z dzisiejszej perspektywy stosowanie tego typu poprawek w modelach płaskich jest nieadekwatne. Jedynym typem poprawek, które w płaskich modelach możemy brać pod uwagę są poprawki od holonomii.

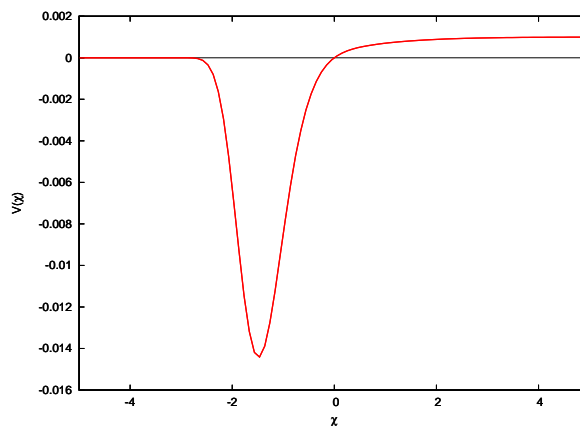
W przypadku klasycznym efektywny Hamiltonian dla modelu cyklicznego ma postać

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} c^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\chi^2}{|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\chi) \quad (5.19)$$

gdzie potencjał $V(\chi)$ wyraża się następująco

$$V(\chi) = V_0(1 - e^{-\chi/m_1}) \exp(-e^{-\chi/m_2}). \quad (5.20)$$

Na Rys. 5.8 przedstawiamy wykres tego potencjału. Efekty polimeryzacji wprowadza-



Rysunek 5.8: Potencjał oscylacyjny $V(\chi)$.

dzamy, tak jak w poprzednich przypadkach, przez zastąpienie

$$c \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \quad (5.21)$$

w wyrażeniach klasycznych. Dostajemy więc

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{p_\chi^2}{|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\chi). \quad (5.22)$$

Na podstawie tego Hamiltonianu wyprowadzamy układ równań który będziemy badać numerycznie

$$\frac{dH}{dt} = 4\pi GP^2 \left[\frac{2}{\rho_c} \left(\frac{P^2}{2} + V(\chi) \right) - 1 \right], \quad (5.23)$$

$$\frac{da}{dt} = Ha, \quad (5.24)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = P, \quad (5.25)$$

$$\frac{dP}{dt} = -3HP - \frac{dV(\chi)}{d\chi}. \quad (5.26)$$

Układ ten będziemy rozwiązywać numerycznie z wykorzystaniem algorytmu Rungego-Kutty. Parametry potencjału przyjmiemy takie same jak w pracy [25], mianowicie

$$V_0 = 0.001, \quad (5.27)$$

$$m_1 = 0.2, \quad (5.28)$$

$$m_2 = \frac{20}{21}. \quad (5.29)$$

Ustalimy też następujące warunki początkowe

$$\chi(t=0) = 0.0, \quad (5.30)$$

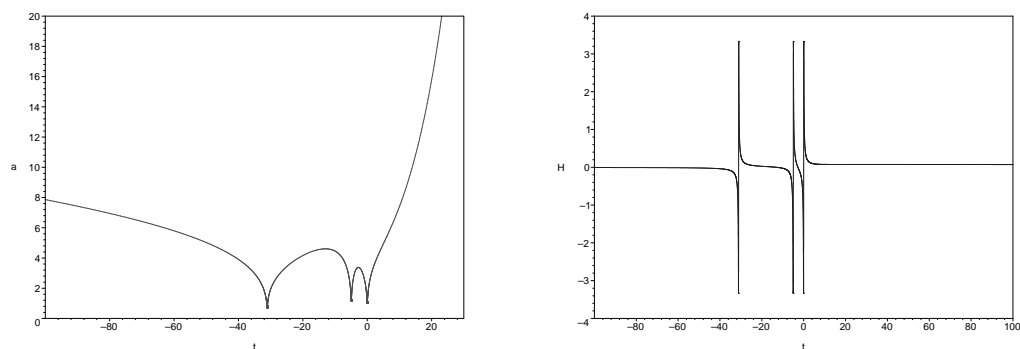
$$a(t=0) = 1.0, \quad (5.31)$$

$$\rho(t=0) = \rho_c. \quad (5.32)$$

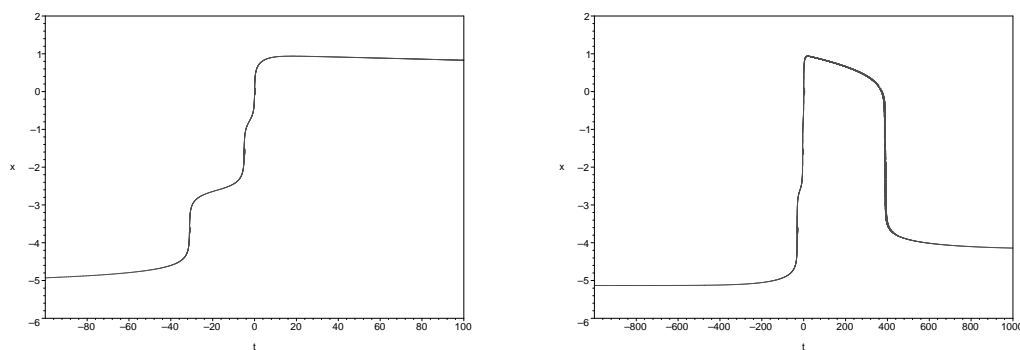
Na Rys. 5.9 przedstawiono otrzymana ewolucję czasową czynnika skali oraz parametru Hubble'a.

Rys. 5.10 przedstawia ewolucję czasową efektywnego pola χ . Jak widać pole to stabilizuje swoją wartość na ujemnych wartościach. Sugeruje to więc, że w modelu tym nie dochodzi do zderzenia bran, przez co unikana jest osobliwość w wyższym wymiarze.

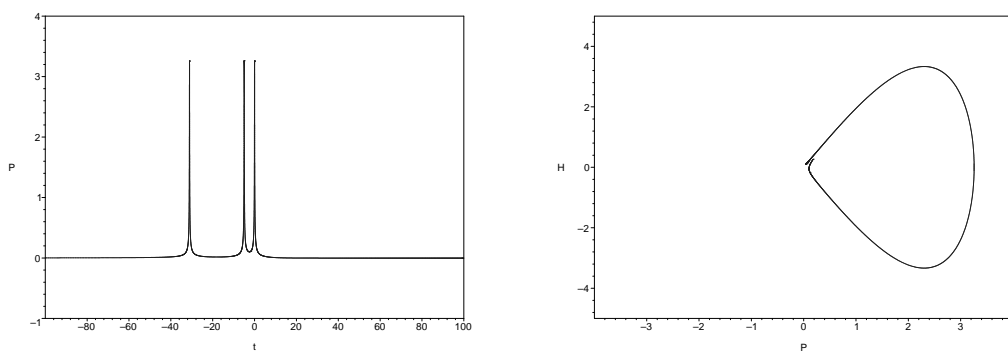
Na Rys. 5.11 przedstawiono ewolucję czasową parametru P oraz odpowiadającą trajektorię fazową na płaszyźnie (H, P) .



Rysunek 5.9: **Lewa** : Ewolucja czasowa czynnika skali a . **Prawa** : Ewolucja czasowa parametru Hubble'a H .



Rysunek 5.10: **Lewa** : Ewolucja czasowa pola χ . **Prawa** : Ewolucja czasowa pola χ .



Rysunek 5.11: **Lewa** : Ewolucja czasowa parametru P . **Prawa** : Krzywa fazowa (H, P) .

6 Podsumowanie

W niniejszej pracy badaliśmy wpływ efektów pętlowej grawitacji na teoriostrunowe modele kosmologiczne. W szczególności rozważaliśmy model z polem dylatonowym i efektami polimeryzacji przestrzeni. W modelu tym wszechświat rozpoczynał swą ewolucję od stanu asymptotycznie swobodnej próżni. Stan taki jest fizyczną realizacją hipotezy o "asymptotycznie przeszłej trywialności". Jak pokazaliśmy, efekty polimeryzacji rozwiązują w tym modelu problem wyjścia do obecnego stanu wszechświata. W przypadku znikającego potencjału dylatonowego znaleźliśmy pełen analityczny opis tego zjawiska. W modelu tym obserwowaliśmy jednak monotoniczny wzrost stałej sprężenia dla obecnej fazy wszechświata. Pokazaliśmy jednak że stała sprężenia może się stabilizować przy obecności potencjału dylatonowego. W przypadku rozważanego potencjału eksponencjalnego oraz masowego z dodatkowym stałym czynnikiem uzyskaliśmy wyjściowy stan de Sittera. Model z potencjałem eksponencjalnym badaliśmy metodami analitycznymi natomiast model z potencjałem masowym poddaliśmy analizie numerycznej. W obu przypadkach gęstości energii osiągała stan maksymalnej wartości

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 G_4^2} \quad (6.1)$$

co odpowiadało fazie Wielkiego Wybuchu. W przeciwieństwie do wyników z teorii klasycznej jest to stan nieosobliwy i przejściowy łączący dwie niskoenergetyczne fazy.

W pracy skonstruowaliśmy także model kolizji bran z efektami pętlowej polimeryzacji. Ograniczyliśmy nasze rozważania do przypadku potencjału cyklicznego. Jak wskazały badania numeryczne uwzględnione kwantowe efekty zatrzymują brany przed kolizją. Jest to manifestowane stabilizacją efektywnego pola χ na ujemnych wartościach. Unikane jest więc pojawienie się osobliwości w wyższych wymiarach.

Rozważania zawarte w tej pracy nie stanowią zamkniętej całości lecz raczej punkt wyjścia dla dalszych badań. W szczególności pozostaje otwarta np. kwestia realizowalności rozważanego scenariusza dla modelu z masowym polem dylatonowym. Mianowicie czy nie potrzebny jest fine-tuning warunków początkowych dla $t \rightarrow -\infty$? Ponadto model kolizji bran został zbadany tylko dla scenariusza cyklicznego. Rozważania te wykonano dla szczególnych warunków brzegowych. Dalsza analiza tego

modelu powinna dotyczyć globalnych własności przestrzeni fazowej. Możliwa jest też analiza bifurkacji dla parametrów V_0, m_1, m_2 .

Jako zakończenie podamy kolejne wybrane kierunki badań w *kosmologii pętlowo-strunowej*.

- Analiza modeli z polem dylatonowym dla czasoprzestrzeni FRW $k = \pm 1$. W modelach tych należy uwzględnić też poprawki od operatora odwrotnej objętości. Spodziewać możemy się więc pojawienia się nowych ciekawych efektów.
- Włączenie pola Kalb-Ramonda lub innych form energii.
- Uwzględnienie innych typów potencjałów dylatonowych.
- Inflacja pola dylatonu, możliwy reheating pola dylatonu.
- Produkcja fluktuacji skalarnych i tensorowych w rozważanych modelach.
- Inne modele inflacji branowej z poprawkami od holonomii.

7 Dodatki

7.1 Pola tła i działanie efektywne w Teorii Strun

Rozważmy przestrzeń stanów struny zamkniętej w D wymiarach. Stanem próżni jest $|p^+, p^i\rangle$ odpowiadający liczbom obsadzeń $N^\perp = 0$ oraz $\bar{N}^\perp = 0$. W przypadku strun zamkniętych mamy zawsze $N^\perp = \bar{N}^\perp$. Masa cząstki odpowiadająca danemu stanowi jest wyrażana przez

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (7.1)$$

W przypadku stanu podstawowego daje to $M^2 = -\frac{4}{\alpha'}$, stan ten nazywamy tachionem. Pierwszy stan wzbudzony $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ opowiada cząstką bezmasowym $M^2 = 0$ i może być zapisany jako kombinacja liniowa

$$\sum_{i,j} R_{ij} a_1^{i\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p^k\rangle \quad (7.2)$$

gdzie R_{ij} jest macierzą o rozmiarach $(D-2) \times (D-2)$. Macierz tą możemy rozbić na część symetryczną oraz antysymetryczną według

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) + \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}. \quad (7.3)$$

Część symetryczna S_{ij} może być następnie zapisana w postaci

$$S_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{D-2} \delta_{ij} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{ij} S \quad (7.4)$$

gdzie $S = S^{ii}$. Łatwo zobaczyć, że pierwszy wyraz po prawej stronie powyższej równości odpowiada macierzy bezśladowej. Wprowadźmy dla niej oznaczenie \hat{S}_{ij} , możemy wtedy zapisać

$$R_{ij} = \hat{S}_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{D-2} \delta_{ij} S. \quad (7.5)$$

Pierwsze stany wzbudzone możemy więc podzielić na trzy grupy

$$\sum_{i,j} \hat{S}_{ij} a_1^{i\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p^k\rangle \quad - \quad \text{grawiton}, \quad (7.6)$$

$$\sum_{i,j} A_{ij} a_1^{i\dagger} a_1^{j\dagger} |p^+, p^k\rangle \quad - \quad \text{Kalb-Ramond}, \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{D-2} S a_1^{i\dagger} a_1^{i\dagger} |p^+, p^k\rangle \quad - \quad \text{dylaton}. \quad (7.8)$$

Reprezentacja symetryczna bezśladowa odpowiada cząstce o spinie 2 którą utożsamiamy z grawitonem. Reprezentacja antysymetryczna odpowiada polu 2-formy $B_{\mu\nu}$ i nazywamy ją polem Kalb-Ramonda. Śladowa część odpowiada polu skalarnemu ϕ nazywanego dylatonem. Pola te mogą tworzyć pewną globalną konfigurację, w której można następnie rozważać teorie struny zamkniętej. W takim przypadku działanie jest sumą trzech części

$$S = S[g] + S[B] + S[\phi]. \quad (7.9)$$

Pierwszym wkładem jest odpowiednik działania Polyakowa w przestrzeni z metryką $g_{\mu\nu}$ o postaci

$$S[g] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{ij} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu g_{\mu\nu}(x). \quad (7.10)$$

Działanie to ma własność niezmienniczości względem transformacji konforemnej $h_{ij} \rightarrow \Omega^2 h_{ij}$ czyli

$$\sqrt{|h|} h^{ij} \rightarrow \sqrt{\Omega^4 \Omega^{-2}} \sqrt{|h|} h^{ij} = \sqrt{|h|} h^{ij} \quad (7.11)$$

gdzie ponadto wykorzystaliśmy diagonalną postać h_{ij} . Symetria ta pozwala nam zawsze wybrać $h_{ij} = \eta_{ij}$. Zakładając brak anomalii będziemy wymagać zachowania symetrii niezmienniczości konforemnej na poziomie kwantowym. Kolejny wkład od działania pochodzi od pola Kalb-Ramonda i ma postać

$$S[B] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \epsilon^{ij} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu B_{\mu\nu}(x) \quad (7.12)$$

gdzie $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. Wkład od pola dylatonu jest równy

$$S[\Phi] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|h|} R^{(2)}(h) \frac{\phi(x)}{2}. \quad (7.13)$$

Działanie to ma ważną własność, która prowadzi do związku pola dylatonu z fizyczną stałą sprzężenia. Mianowicie rozważmy transformacje

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \bar{\phi}. \quad (7.14)$$

Przeprowadza ona całkowite działanie do postaci

$$S \rightarrow S + \frac{\bar{\phi}}{2}\chi \quad (7.15)$$

gdzie χ jest charakterystyką Eulera zdefiniowaną jako

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_g} d^2z \sqrt{|h|} R^{(2)}(h) = 2 - 2g. \quad (7.16)$$

Widać więc, że dla stałej składowej pola χ działanie ma charakter topologiczny zależny tylko od genusa g rozmaitości Σ_g . Jest to ważne z punktu widzenia tak zwanego rozwinięcia topologicznego w Teorii Strun, które jest odpowiednikiem rozwinięcia pętlowego w teorii pola. Pod działaniem (7.14) funkcja rozkładu transformuje się więc jak

$$Z = \sum_{g=0}^{\infty} (\kappa_D)^{\chi(g)/2} \int Dx Dhe^{-S} \rightarrow \sum_{g=0}^{\infty} (\kappa_D e^{\bar{\phi}})^{\chi(g)/2} \int Dx Dhe^{-S}, \quad (7.17)$$

co prowadzi do wyrażenia na fizyczną stałą sprzężenia

$$\kappa_{\text{phys}} = \kappa_D e^{\bar{\phi}}. \quad (7.18)$$

Efektywne działanie wprowadzamy ustalając rząd po rzędzie niezmienniczość względem transformacji konformnej. Rozważając kwantowe fluktuacje wokół trajektorii klasycznej $x = x_0 + \hat{x}$ metrykę $g_{\mu\nu}$ możemy zapisać w postaci

$$g(x) = \eta + R\hat{x}\hat{x} + \partial R\hat{x}\hat{x}\hat{x} + R^2\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x} + \dots, \quad (7.19)$$

gdzie wykorzystano możliwość wyboru lokalnego układu inercjalnego. W najniższym rzędzie prowadzi to do wyrażenia

$$S[\phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\lambda_s^{D-2}} \int_{\Omega} d^Dx \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \frac{1}{12} H^2 \right]. \quad (7.20)$$

Uwzględniając wyższe rzędy rozwinięcia (7.19) dostajemy dodatkowe człony do działania efektywnego, n.p.

$$-\frac{\alpha'}{4} e^{-\phi} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2. \quad (7.21)$$

Pomimo, że człony tego typu są zaniedbywalne w fazie nieskoenergetycznej mogą one mieć istotny wpływ na ewolucję wysokoenergetyczną. Jest to ważne z punktu widzenia zachowania się modeli kosmologicznych w pobliżu osobliwości.

7.2 Elementy Pętlowej Grawitacji Kwantowej

Podstawą do sformułowania Pętlowej Grawitacji Kwantowej (Loop Quantum Gravity - LQG) są tak zwane zmienne Ashtekara [42, 43]. W ich języku Ogólna Teoria Względności przybiera postać teorii Yanga-Millsa z grupą $SU(2)$. Formalne wprowadzenie tych zmiennych odbywa się na poziomie Hamiltonowskiego sformułowania teorii grawitacji. Sformułowanie to może być też wprowadzone *a priori* bez wcześniejszego odwoływania się do zmiennych geometrycznych jak np. pokazuje Smolin [44]. Postąpmy więc w ten sposób wprowadzając przestrzeń Σ bez zdefiniowanej struktury metrycznej. Na tej przestrzeni rozważmy teorię Yanga-Millsa z wiązką $SU(2)$. Zmienne kanoniczne dla tej teorii będą pole koneksji A wraz z kanonicznie sprzężonym polem E . Oznaczenia te wybrano w odpowiedzi do teorii $U(1)_{\text{em}}$ gdzie A jest czteropotencjałem a E polem elektrycznym. W przypadku rozważanej teorii $SU(2)$ zmienną $A \in \mathfrak{su}(2)$ nazywamy koneksją Ashtekara a pole $E \in \mathfrak{su}(2)^*$ polem gęstości triadu. Pola te spełniają klasyczny nawias Poissona

$$\{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.22)$$

gdzie stałą γ nazywamy parametrem Barbero-Immirzi a $\kappa = 8\pi G$. Wprowadzono tu konwencję w której indeksy przestrzenne to a, b, c, \dots natomiast indeksy grupowe to i, j, k, \dots . Kolejnym krokiem będzie wprowadzenie więzów niezmienniczości względem lokalnych dyfeomorfizmów w budowanej teorii koneksji $SU(2)$. Najprostszym będzie tak zwany więz Gaussa w postaci

$$G_i = D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a \approx 0. \quad (7.23)$$

Więz ten zapewnia niezmienniczość względem obrotów. Kolejnym będzie więz niezmienniczości względem przestrzennych dyfeomorfizmów

$$C_a = E_i^b F_{ab}^i - (1 - \gamma^2) K_a^i G_i \approx 0. \quad (7.24)$$

Ostatnim a zarazem najważniejszym jest więz dyfeomorfizmów czasowych czyli tak zwany więz skalarny

$$H_G = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \epsilon^{ij} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} K_{[a}^i K_{b]}^j \approx 0 \quad (7.25)$$

gdzie $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ jest krzywizną koneksji Ashtekara a $\gamma K_a^i = A_a^i - \Gamma_a^i$ gdzie Γ_a^i jest koneksją spinową, która może być wyrażona przez pole E . Mianowicie

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij} e_j^b \left(\partial_{[a} e_{b]}^k + \delta^{kl} \delta_{ms} e_l^c e_a^m \partial_b e_c^s \right) \quad (7.26)$$

gdzie

$$e_a^i = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{abc} E_j^b E_k^c}{\sqrt{|\det(E)|}} \quad \text{oraz} \quad e_i^a = \frac{\text{sgn}(\det(E)) E_i^a}{\sqrt{|\det(E)|}}. \quad (7.27)$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy teorie na poziomie klasycznym. Możemy teraz dokonać interpolacji geometrycznej. Mianowicie definiujemy

$$E_i^a = \sqrt{|\det q|} e_i^a \quad (7.28)$$

gdzie $q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}$. Stąd jak łatwo pokazać

$$\det(q) q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}. \quad (7.29)$$

Pole E może być więc zinterpretowana w języku pola metrycznego q_{ab} . W ten sposób rozważana teoria Yanga-Millsa zadaje strukturę metryczną na rozmaitości Σ .

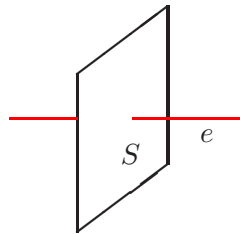
Kwantowanie rozważanej teorii przebiega w sposób odmienny niż w standardowej teorii pól Yanga-Millsa gdzie rozważamy stany w przestrzeni Focka. Niezbędne będzie mianowicie wprowadzenie nowych nielokalnych zmiennych. Pierwszą z nich będzie holonomia

$$h_e[A] = \mathcal{P} \exp \int_e A \quad (7.30)$$

gdzie e jest krzywą $e \in \Sigma$, drugą natomiast strumień

$$F_S^i[E] = \int_S \star E^i \quad (7.31)$$

gdzie S jest powierzchnią $S \in \Sigma$. Rozważmy więc krzywą e oraz powierzchnie S zanurzone w przestrzeni Σ . Przypadek kiedy ulegają one przecięciu przedstawiono poniżej.



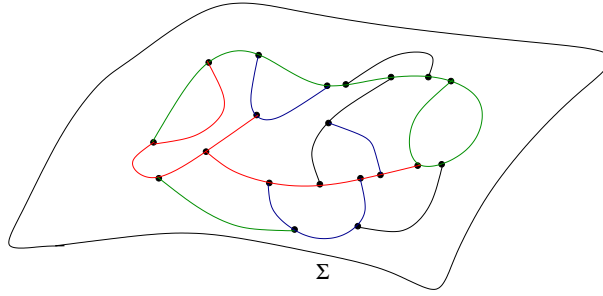
Dla takiej elementarnej konfiguracji możemy wyznaczyć nawias Poissona dla nowo wprowadzonych zmiennych

$$\{h_e[A], F_S^i[E]\} = \frac{\kappa\gamma}{4}\alpha(e, S)\tau^i h_e[A] \quad (7.32)$$

gdzie $\alpha(e, S) = \pm 1$ dla przypadku $S \cap e \neq 0$ oraz $\alpha(e, S) = 0$ w przypadku $S \cap e = 0$. Kinematykę kwantową konstruujemy przemianowując zmienne (h, F) na operatory kwantowe. Zdefiniujemy teraz kinematyczną przestrzeń Hilberta. Mianowicie w LQG funkcja falowa próbkuje geometrię tylko na jednowymiarowej podrozmaitości zwanej siecią spinową

$$\Psi_\Gamma(A) := \psi(h_{e_1}(A), \dots, h_{e_n}(A)) \in \text{Cyl} \quad (7.33)$$

gdzie $\{e_1, \dots, e_n\}$ to krawędzie sieci spinowej. Funkcje tego typu nazywamy cylindrycznymi. Kinematyczna przestrzeń Hilberta \mathcal{H}_{kin} jest więc przestrzenią sieci spinowych. Sieci te oznaczane jako Γ tworzą grafy o skończonej liczbie linków. Każdy link oznaczony jest indeksem numerującym reprezentacje grupy $SU(2)$. Przedstawiono to diagramatycznie na rysunku poniżej. Kolejnym naturalnym krokiem jest zdefiniowanie



Rysunek 7.1: Przykład sieci spinowej.

ilocznu skalarnego oraz wprowadzenie więzów na poziomie kwantowym. Nie będzie to jednak istotne z punktu widzenia rozważań zawartych w tej pracy. Jako zakończenie tego podrozdziału podamy zbiór odpowiednich referencji w których czytelnik będzie mógł znaleźć dalsze informacje na temat Pętlowej Grawitacji Kwantowej. Zanim jednak do tego przejdziemy przedstawimy jeden z podstawowych wyników w LQG, będący ponadto istotnym z punktu widzenia rozważań prowadzonych w tej pracy. Mianowicie chodzi o kwantowanie operatora powierzchni. Jak widzieliśmy strumienie $F_S^i[E]$ są obiektami związanymi z powierzchnią. Będą one więc pomocne przy zdefiniowaniu operatora powierzchni $S \in \Sigma$. Mianowicie definiujemy operator powierzchni

$$\hat{A}_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{A}_S^N \quad (7.34)$$

jako granicę sum Riemmana

$$\hat{A}_S^N = \sum_{I=1}^N \sqrt{\hat{F}_i(S_I) \hat{F}^i(S_I)}, \quad (7.35)$$

co odpowiada rozbięciu powierzchni S na komórki S_I . Można teraz pokazać że działanie tak zdefiniowanego operatora jest diagonalizowane przez stany sieci spinowej $|\Psi_\Gamma\rangle$. Dostajemy ostatecznie

$$\hat{A}_S |\Psi_\Gamma\rangle = \kappa\gamma \sum_p \sqrt{j_p(j_p + 1)} |\Psi_\Gamma\rangle \quad (7.36)$$

gdzie p przebiega po krawędziach sieci spinowej Γ przecinających powierzchnię S . Widmo operatora jest więc dyskretne z minimalną wartością własną odpowiadającą $j = 1/2$.

Obszerne omówienie zagadnień z zakresu Pętlowej Grawitacji Kwantowej czytelnik może znaleźć w książce Carlo Rovelliego [45]. Po bardziej elementarne i szybkie wprowadzenie odsyłamy do pracy Hermanna Nicolai oraz Kaspera Pattersa [46]. Ponadto istnieje szereg obszernych wprowadzeń jak [1, 47–49]. W kontekście kwantowych czarnych dziur odsyłamy do prac [8, 9]. Natomiast odnośnie zastosowań kosmologicznych rekomendujemy [50–52].

7.3 Program do ewolucji numerycznej

```
#include "stdio.h"
#include "math.h"

#define PI 3.14159
#define BI 0.12738
#define rhoc 5.307
#define m 25.0
#define phiz 0.0
#define V0 0.01

float Fx(float xx,float yy,float zz,float aa, float tt)
{
    float Funcx ;
```

```
Funcx = 4*PI*pow(zz,2.0)*(pow(zz,2.0)/rhoc+
(2.0*V0+m*m*(yy-phiz)*(yy-phiz))*exp(sqrt(16*PI)*yy)/rhoc-1.0);
return( Funcx );
}

float Fy(float xx,float yy,float zz,float aa, float tt)
{
float Funcy ;
Funcy = zz ;
return( Funcy );
}

float Fz(float xx,float yy,float zz,float aa, float tt)
{
float Funcz ;
Funcz = -3.0*xx*zz-m*m*(2*(yy-phiz)+
sqrt(16*PI)*(yy-phiz)*(yy-phiz))*exp(sqrt(16*PI)*yy)/2.0
-V0*sqrt(16*PI)*exp(sqrt(16*PI)*yy) ;
return( Funcz );
}

float Fa(float xx,float yy,float zz,float aa, float tt)
{
float Funca ;
Funca = xx*aa ;
return( Funca );
}

float Ft(float xx,float yy,float zz,float aa, float tt)
{
float Funct ;
Funct = exp(sqrt(4*PI)*yy) ;
return( Funct );
}
```

```
}

int main()
{
    int i;
    float tildt,h,gs,w,rho;
    float x,y,z,a,t,K1x,K2x,K3x,K4x,K1y,K2y,K3y,K4y,K1z,K2z,K3z,K4z;
    float K1a,K2a,K3a,K4a;
    float K1t,K2t,K3t,K4t;
    char text[150];
    FILE *out ;
    out = fopen("outfile.dat","w") ;

    h = 0.001;

    tildt = 0.0 ;
    t = 0.0 ;
    x = 0.0 ;
    y = -1.0/sqrt(4*PI) ;
    z = sqrt(2.0*rhoc-(2.0*V0+m*m*(y-phiz)*(y-phiz))*exp(sqrt(16*PI)*y) );
    a = 100.0;

    for (i=1; i<100000; ++i){

        /*Runge-Kutta*/

        K1x=h*Fx(x,y,z,a,t);
        K1y=h*Fy(x,y,z,a,t);
        K1z=h*Fz(x,y,z,a,t);
        K1a=h*Fa(x,y,z,a,t);
        K1t=h*Ft(x,y,z,a,t);

        K2x=h*Fx(x+K1x/2.0,y+K1y/2.0,z+K1z/2.0,a+K1a/2.0,t+K1t/2.0);
        K2y=h*Fy(x+K1x/2.0,y+K1y/2.0,z+K1z/2.0,a+K1a/2.0,t+K1t/2.0);
        K2z=h*Fz(x+K1x/2.0,y+K1y/2.0,z+K1z/2.0,a+K1a/2.0,t+K1t/2.0);
        K2a=h*Fa(x+K1x/2.0,y+K1y/2.0,z+K1z/2.0,a+K1a/2.0,t+K1t/2.0);
        K2t=h*Ft(x+K1x/2.0,y+K1y/2.0,z+K1z/2.0,a+K1a/2.0,t+K1t/2.0);
```

```

K3x=h*Fx(x+K2x/2.0,y+K2y/2.0,z+K2z/2.0,a+K2a/2.0,t+K2t/2.0);
K3y=h*Fy(x+K2x/2.0,y+K2y/2.0,z+K2z/2.0,a+K2a/2.0,t+K2t/2.0);
K3z=h*Fz(x+K2x/2.0,y+K2y/2.0,z+K2z/2.0,a+K2a/2.0,t+K2t/2.0);
K3a=h*Fa(x+K2x/2.0,y+K2y/2.0,z+K2z/2.0,a+K2a/2.0,t+K2t/2.0);
K3t=h*Ft(x+K2x/2.0,y+K2y/2.0,z+K2z/2.0,a+K2a/2.0,t+K2t/2.0);

K4x=h*Fx(x+K3x,y+K3y,z+K3z,a+K3a,t+K3t);
K4y=h*Fy(x+K3x,y+K3y,z+K3z,a+K3a,t+K3t);
K4z=h*Fz(x+K3x,y+K3y,z+K3z,a+K3a,t+K3t);
K4a=h*Fa(x+K3x,y+K3y,z+K3z,a+K3a,t+K3t);
K4t=h*Ft(x+K3x,y+K3y,z+K3z,a+K3a,t+K3t);

x=x+(K1x+2.0*K2x+2.0*K3x+K4x)/6.0;
y=y+(K1y+2.0*K2y+2.0*K3y+K4y)/6.0;
z=z+(K1z+2.0*K2z+2.0*K3z+K4z)/6.0;
a=a+(K1a+2.0*K2a+2.0*K3a+K4a)/6.0;
t=t+(K1t+2.0*K2t+2.0*K3t+K4t)/6.0;

tildt += h;

gs = exp(y*sqrt(16*PI));

w = (z*z-(2.0*V0+m*m*y*y)*exp(sqrt(16*PI)*y) )

/(z*z+(2.0*V0+m*m*y*y)*exp(sqrt(16*PI)*y)) ;

rho = z*z/2.0+(2.0*V0+m*m*y*y)*exp(sqrt(16*PI)*y)/2.0 ;

/*zapisywanie*/

sprintf(text, "%f %f %f %f %f %f %f %f %f \n",t,tildt,a,x,y,gs,gs*a,w,rho);
fputs(text,out) ;
}

fclose(out) ;

```

```
printf(" zapisane \n " );  
return(0);
```

```
}
```


Bibliografia

- [1] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* **21**, R53 (2004), arXiv:gr-qc/0404018.
- [2] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, (2006), arXiv:hep-th/0604212.
- [3] J. C. Baez, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1827 (1998), arXiv:gr-qc/9709052.
- [4] A. Perez, *Class. Quant. Grav.* **20**, R43 (2003), arXiv:gr-qc/0301113.
- [5] C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **442**, 753 (1995), arXiv:gr-qc/9411005.
- [6] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* **14**, A55 (1997), arXiv:gr-qc/9602046.
- [7] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Adv. Theor. Math. Phys.* **1**, 388 (1998), arXiv:gr-qc/9711031.
- [8] L. Modesto, *Phys. Rev. D* **70**, 124009 (2004), arXiv:gr-qc/0407097.
- [9] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998), arXiv:gr-qc/9710007.
- [10] M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **17**, 1489 (2000), arXiv:gr-qc/9910103.
- [11] M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **17**, 1509 (2000), arXiv:gr-qc/9910104.
- [12] M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **18**, 1055 (2001), arXiv:gr-qc/0008052.
- [13] M. Bojowald, *Class. Quant. Grav.* **18**, 1071 (2001), arXiv:gr-qc/0008053.
- [14] M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5227 (2001), arXiv:gr-qc/0102069.
- [15] M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 261301 (2002), arXiv:gr-qc/0206054.
- [16] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 141301 (2006), arXiv:gr-qc/0602086.

- [17] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **73**, 124038 (2006), arXiv:gr-qc/0604013.
- [18] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **74**, 084003 (2006), arXiv:gr-qc/0607039.
- [19] J. Mielczarek, T. Stachowiak, and M. Szydlowski, Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology, 2008, arXiv:0801.0502 [gr-qc].
- [20] J. E. Lidsey, D. Wands, and E. J. Copeland, *Phys. Rept.* **337**, 343 (2000), arXiv:hep-th/9909061.
- [21] E. J. Copeland, A. Lahiri, and D. Wands, *Phys. Rev. D* **50**, 4868 (1994), arXiv:hep-th/9406216.
- [22] A. Buonanno, T. Damour, and G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* **543**, 275 (1999), arXiv:hep-th/9806230.
- [23] M. Gasperini and G. Veneziano, *Phys. Rept.* **373**, 1 (2003), arXiv:hep-th/0207130.
- [24] G. D. Risi, R. Maartens, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **76**, 103531 (2007), arXiv:0706.3586 [hep-th].
- [25] M. Bojowald, R. Maartens, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **70**, 083517 (2004), arXiv:hep-th/0407115.
- [26] J. M. Cline, (2006), arXiv:hep-th/0612129.
- [27] U. H. Danielsson, *Class. Quant. Grav.* **22**, S1 (2005), arXiv:hep-th/0409274.
- [28] M. Gasperini, (1997), arXiv:gr-qc/9706037.
- [29] M. Gasperini, *Lect. Notes Phys.* **737**, 787 (2008), arXiv:hep-th/0702166.
- [30] M. Gasperini and G. Veneziano, *String Theory and Pre-big bang Cosmology*, 2007, arXiv:hep-th/0703055.
- [31] P. Horava and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **460**, 506 (1996), arXiv:hep-th/9510209.
- [32] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999), arXiv:hep-ph/9905221.
- [33] P. J. Steinhardt and N. Turok, *Phys. Rev. D* **65**, 126003 (2002), arXiv:hep-th/0111098.

- [34] J. Khoury, P. J. Steinhardt, and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 031302 (2004), arXiv:hep-th/0307132.
- [35] P. J. Steinhardt and N. Turok, (2001), arXiv:hep-th/0111030.
- [36] N. Turok and P. J. Steinhardt, *Phys. Scripta* **T117**, 76 (2005), arXiv:hep-th/0403020.
- [37] M. Bojowald, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1771 (2006), arXiv:gr-qc/0609034.
- [38] J. Mielczarek and M. Szydlowski, Emerging singularities in the bouncing loop cosmology, 2008, arXiv:0801.1073 [gr-qc].
- [39] O. Hrycyna, J. Mielczarek, and M. Szydlowski, (2008), arXiv:0804.2778 [gr-qc].
- [40] M. Domagala and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5233 (2004), arXiv:gr-qc/0407051.
- [41] K. A. Meissner, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5245 (2004), arXiv:gr-qc/0407052.
- [42] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [43] A. Ashtekar, *Phys. Rev. D* **36**, 1587 (1987).
- [44] L. Smolin, (2002), arXiv:hep-th/0209079.
- [45] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [46] H. Nicolai and K. Peeters, *Lect. Notes Phys.* **271**, 151 (2007), arXiv:hep-th/0601129.
- [47] A. Perez, (2004), arXiv:gr-qc/0409061.
- [48] H. Nicolai, K. Peeters, and M. Zamaklar, *Class. Quant. Grav.* **22**, R193 (2005), arXiv:hep-th/0501114.
- [49] L. Smolin, (2004), arXiv:hep-th/0408048.
- [50] M. Bojowald, *Living Rev. Rel.* **8**, 11 (2005), arXiv:gr-qc/0601085.
- [51] A. Ashtekar, M. Bojowald, and J. Lewandowski, *dv. Theor. Math. Phys.* **7**, 233 (2003), arXiv:gr-qc/0304074.
- [52] A. Ashtekar, *Nuovo Cim.* **122B**, 135 (2007), arXiv:gr-qc/0702030.