

Ograniczenia na parametry kosmologiczne od struktur wielkoskalowych

Gromady Galaktyk

Jakub Mielczarek

22 Marca, 2007

Wszechświat FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Równania Friedmana

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

Równanie ciągłości

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

gdzie $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Równanie ewolucji zaburzeń

$$\rho = \rho_m + \rho_x$$

$$p = 0 + p_x$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0$$

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

Wprowadzamy zaburzenie czynnika skali

$$a = \tilde{a}(1 + y)$$

Tylko materia podlega zaburzeniom

$$\rho_x = \tilde{\rho}_x$$

$$\rho_m = \tilde{\rho}_m \left(\frac{a}{\tilde{a}}\right)^{-3} = \tilde{\rho}_m(1 + y)^{-3} = \tilde{\rho}_m(1 - 3y) + \mathcal{O}(y^2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}(1+y) + \ddot{y} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{y} = -\frac{8\pi G}{6}\tilde{\rho}_m(1-3y)(1+y) - \frac{8\pi G}{6}(\rho_x + 3p_x)(1+y) + \frac{\Lambda}{3}(1+y)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}(1+y) + \ddot{y} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{y} = -\frac{8\pi G}{6}(\tilde{\rho}_m + \rho_x + 3p_x)(1+y) + \frac{\Lambda}{3}(1+y) + 4\pi G\tilde{\rho}_my + \mathcal{O}(y^2)$$

Równanie ewolucji zaburzeń:

$$\ddot{y} + 2H\dot{y} - 4\pi G\tilde{\rho}_my = 0$$

Interpretacja czynnika y

$$\ddot{y} + 2H\dot{y} - 4\pi G\tilde{\rho}_m y = 0$$

$$\begin{aligned}\rho_m &= \tilde{\rho}_m(1 - 3y) \\ -3y &= \frac{\rho_m - \tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_m}\end{aligned}$$

Definiujemy

$$\delta = \frac{\rho_m - \tilde{\rho}_m}{\tilde{\rho}_m}$$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\tilde{\rho}_m\delta = 0$$

$$(\Omega_m, \Omega_\Lambda, k = 0)$$

$$\Omega_m := \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3H_0^2}$$

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

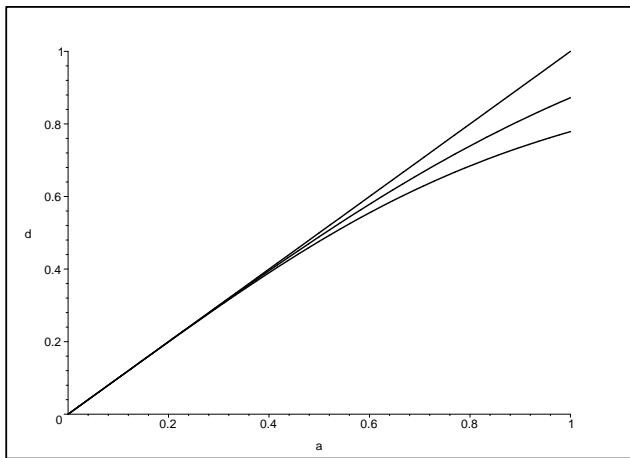
$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda \right]$$

gdzie spełnione jest $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$

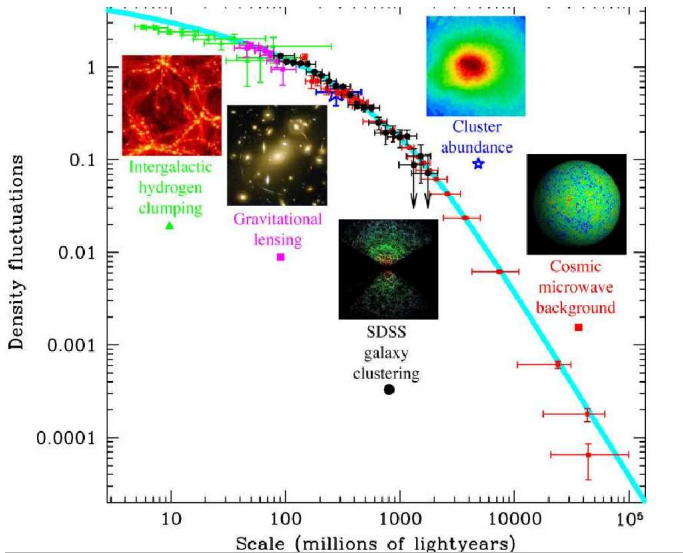
Rozwiązanie równania kontrastu dla modów rosnących ma postać

$$\delta(a) = a {}_2F_1 \left[\frac{1}{3}, 1, \frac{11}{6}, -\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} a^3 \right]$$

gdzie przyjęto normalizację $\delta(a) = a$ dla $\Omega_m = 1$ i $\Omega_\Lambda = 1$ oraz $a_0 = 1$.



Wykres funkcji $\delta(a)$ dla (licząc od dołu) $\Omega_m = 0.5$, $\Omega_m = 0.3$ i $\Omega_m = 0.1$.



Czynnik wzrostu:

$$f = \frac{d \ln \delta}{d \ln a}$$

$$f(a) = 1 - \frac{6}{11} \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} a^3 \frac{{}_2F_1 \left[2, \frac{4}{3}, \frac{17}{6}, -\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} a^3 \right]}{{}_2F_1 \left[\frac{1}{3}, 1, \frac{11}{6}, -\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} a^3 \right]}$$

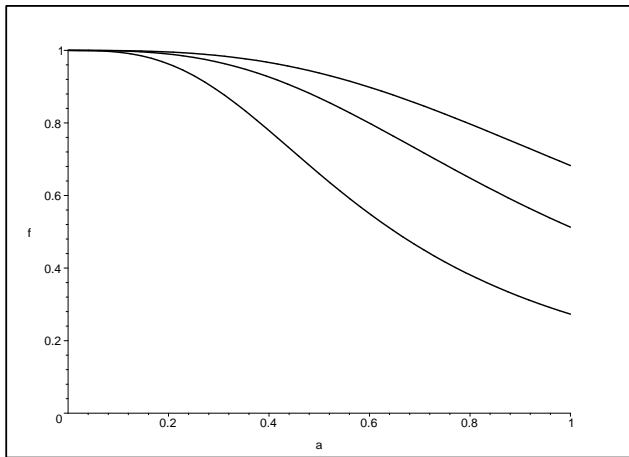
Dla $a = 1$ funkcja $f(a)$ przybiera wartości:

dla $\Omega_m = 0.1$ mamy $f = 0.273$

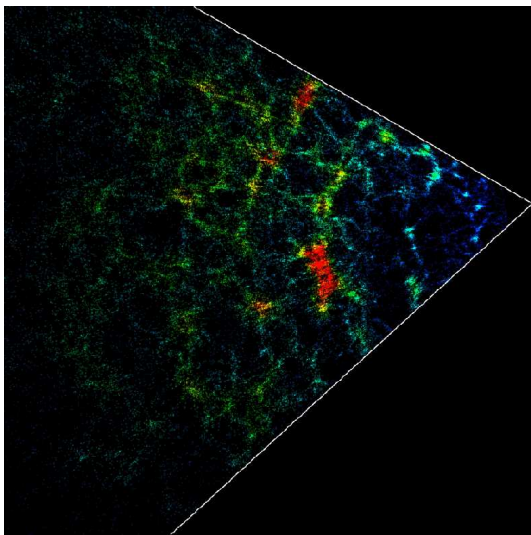
dla $\Omega_m = 0.3$ mamy $f = 0.513$

dla $\Omega_m = 0.5$ mamy $f = 0.683$

Obserwacje dają $f = 0.51 \pm 0.10$.



Wykres funkcji $f(a)$ dla (licząc od góry) $\Omega_m = 0.5$, $\Omega_m = 0.3$ i $\Omega_m = 0.1$



<http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS/>

Dwupunktowa funkcja korelacji:

$$dP_{12} \equiv \bar{n}^2 [1 + \xi(r/r_0)] dV_1 dV_2$$

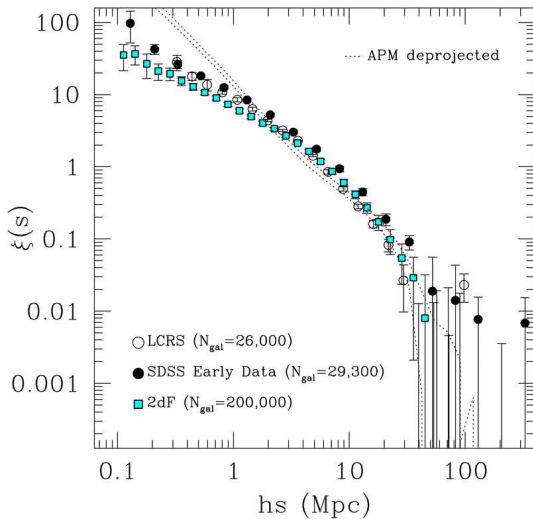
gdzie przyjmujemy normalizację $\xi(r_0/r_0) = 1$.

$$\xi|_{obs} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$$

gdzie

$$\gamma = 1.77 \pm 0.04$$

$$r_0 = 7.4 \pm 1.4 Mpc$$



<http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS/>

Z definicji

$$\begin{aligned}\xi(\vec{r}) &\equiv \langle \delta(\vec{x} + \vec{r})\delta(\vec{x}) \rangle \\ &= \frac{1}{V} \int d^3x \delta(\vec{x} + \vec{r})\delta(\vec{x})\end{aligned}$$

Wstawiamy

$$\begin{aligned}\delta(\vec{x} + \vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_k e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \\ \delta(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \delta_q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\end{aligned}$$

i dostajemy

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{V} \int d^3x d^3k d^3q e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}+\vec{r})} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \delta_k \delta_q = \dots$$

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{V} \int d^3x d^3k d^3q e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i(\vec{q}+\vec{k})\cdot\vec{x}} \delta_k \delta_q \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{V} \int d^3x d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta^3(\vec{q} + \vec{k}) \delta_k \delta_q \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{V} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |\delta_k|^2
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy $\delta_{-k} = \delta_k^*$.

Definiując $P(k) \equiv |\delta_k|^2$ dostajemy

Widmo zaburzeń :

$$P(k) = V \int d^3r \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Przykład:

Policzmy

$$P(k) = V \int d^3r \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

dla

$$\xi = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}$$

Mamy

$$\begin{aligned} P(k) &= V 2\pi r_0^\gamma \int dr \sin \theta d\theta r^{2-\gamma} e^{ikr \cos \theta} \\ &\simeq \frac{V 4\pi r_0^\gamma}{k} \int_0^\infty dr \sin \theta d\theta r^{1-\gamma} \sin(kr) \\ &= 4\pi V r_0^\gamma \Gamma(2-\gamma) \sin \left[(2-\gamma) \frac{\pi}{2} \right] \cdot k^{\gamma-3} \end{aligned}$$

Interesuje nas zbadanie wielkości $(\delta M/M)$.

Jak to zmierzyć?

Bierzemy obszar o objętości V_M i mierzymy zawartą w nim masę, robimy tak dla każdego punktu przestrzeni. Na tej podstawie otrzymujemy dyspersję rozkładu M .

Definiujemy funkcję przepuszczania (window function) $W(\vec{r})$ jako

$$V_M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 W(r)$$

spełniające $M = \rho_{cr0} \Omega_m V_M$.

Fluktuacja masy wygładzona po "oknie" wynosi

$$\frac{\delta M}{M}(\vec{r}) = \frac{1}{V_M} \int d^3x \delta(\vec{x}) W(|\vec{x} - \vec{r}|)$$

Wyliczmy wariancję rozkładu masy zdefiniowaną jako

$$\sigma^2(M) \equiv \langle |\delta M/M|^2 \rangle = \frac{1}{V} \int d^3r |\delta M/M|^2$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(M) &= \frac{1}{V} \int d^3r \left| \frac{\int d^3x \delta(\vec{x}) W(|\vec{x} - \vec{r}|)}{V_M^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{V} \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} |\delta_k W_k|^2 \\ &= \frac{1}{V} \frac{1}{V_M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k) |W_k|^2\end{aligned}$$

Gdzie wykorzystaliśmy

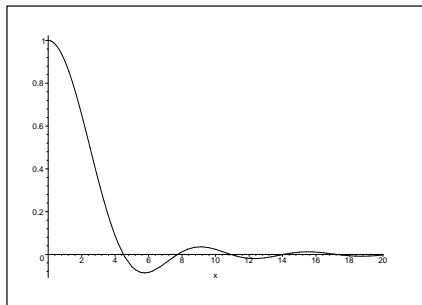
$$\int d^3r |\{g * f\}(r)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |\tilde{g}_k \cdot \tilde{f}_k|^2$$

Wybermy konkretną postać “okna”

$$W(r) = \begin{cases} 1 & r \leq r_M \\ 0 & r > r_M \end{cases}$$

gdzie

$$r_M = \left(\frac{3M}{4\pi\Omega_m\rho_{cr0}} \right)^{1/3}$$



$$W_k = 4\pi r_M^3 \left[\frac{\sin(kr_M)}{(kr_M)^3} - \frac{\cos(kr_M)}{(kr_M)^2} \right] = 3V_M \left[\frac{\sin(kr_M)}{(kr_M)^3} - \frac{\cos(kr_M)}{(kr_M)^2} \right]$$

$$N(> M) = \int_M^{\infty} dM' n(M')$$

Chcemy wyznaczyć $n(M)$.

- Zakładamy że zaburzenia początkowe mają rozkład gaussowski
- Jeśli fluktuacje masy będą wystarczająco duże materia będzie mogła kolapsować
- Cała materia we wszechświecie skolapsowała do postaci zwiralizowanych gromad galaktyk

Zaburzenia gęstości kolapsują i wiralizują kiedy wartość kontrastu gęstości $\delta = \delta\rho/\rho$ przekracza wartość krytyczną δ_c .

Prawdopodobieństwo że obszar o masie M skolapsuje wynosi

$$\text{erfc}\left[\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right]$$

bo

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} = 1 - 2 \int_0^{\delta_c} d\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma}} dt e^{-t^2} = 1 - \text{erf}\left[\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right] = \text{erfc}\left[\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)}\right] \end{aligned}$$

A jeśli cała materia we wszechświecie uległa kolapsowi to

$$N(> M) = \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \operatorname{erfc} \left[\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(M)} \right]$$

Stąd wyliczamy różnicową funkcję masy

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\sigma} &= \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{d}{d\sigma} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma}} dt e^{-t^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

lub

$$\frac{dN(> M)}{d \ln \sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma} \exp \left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2} \right]$$

Różniczkując

$$N(> M) = \int_M^{\infty} dM' n(M')$$

dostajemy

$$n(M) = -\frac{dN(> M)}{dM} = -\frac{dN(> M)}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dM}$$

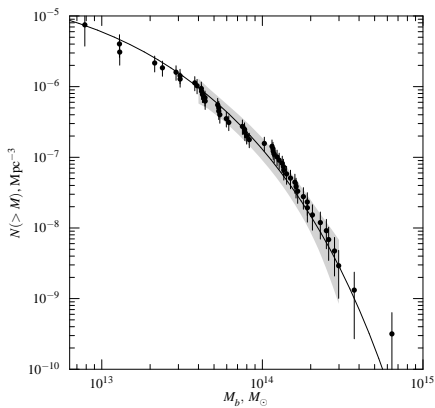
i wstawiając

$$\frac{dN(> M)}{d\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right]$$

Dostajemy ostatecznie

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dM} \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right]$$

Lokalna funkcja masy



arXiv:astro-ph/0305549

Zbieramy wszystko razem:

$$n(M) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Omega_m \rho_{cr0}}{M} \frac{\delta_c}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dM} \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right]$$

Wariancja gęstości zaburzeń wynosi

$$\sigma^2(M) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{P(k)}{V} \left| 3 \left[\frac{\sin(kr_M)}{(kr_M)^3} - \frac{\cos(kr_M)}{(kr_M)^2} \right] \right|^2$$

gdzie

$$r_M = \left(\frac{3M}{4\pi\Omega_m\rho_{cr0}} \right)^{1/3}$$

Oraz widmo zaburzeń

$$P(k) = VAk^n T^2(k)$$

Funkcje transferu definiujemy jako

$$T(k) \equiv \frac{\delta_k(z=0)}{\delta_k(z)\delta(z)}$$

W przypadku modelu Λ CDM można ją zapisać jako

$$T_\Lambda(p) = \frac{\ln(1 + 2.34p)}{2.34p} [1 + 3.89p + (16.1p)^2 + (5.46p)^3 + (6.71p)^4]^{-1/4}$$

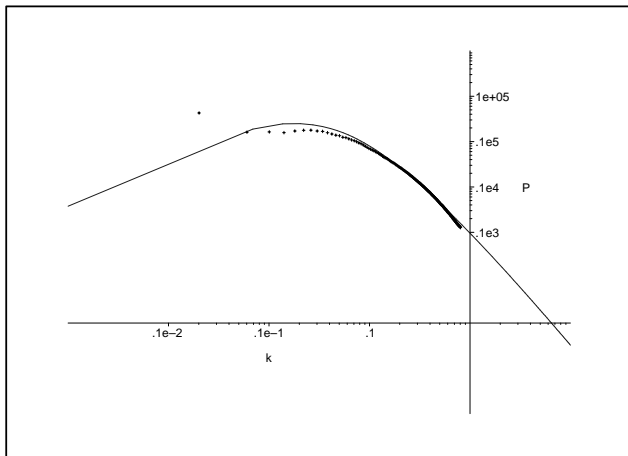
gdzie

$$p = \frac{k}{\Gamma h \text{ Mpc}^{-1}}$$

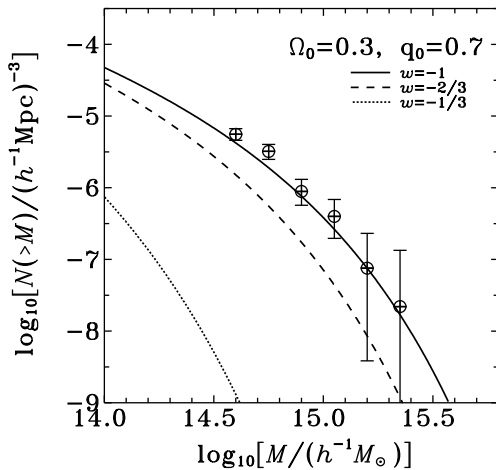
$$\Gamma = \Omega_m h \exp \left[-\Omega_b (1 + \sqrt{2h/\Omega_m}) \right]$$

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km}/(\text{s Mpc})}$$

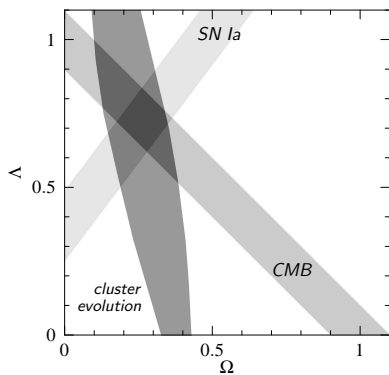
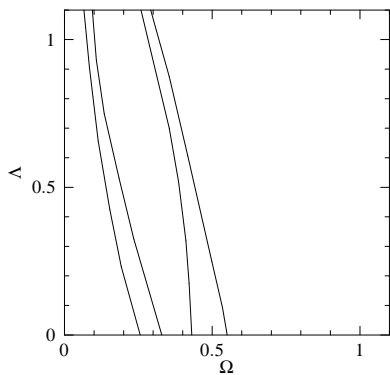
Widmo zaburzeń dla $n = 1$ oraz $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_b = 0.04$ oraz $h = 0.7$, porównanie z danymi 2dFGRS.



Model z kwintesencją $p_Q = w\rho_Q$.



arXiv:astro-ph/0112031



arXiv:astro-ph/0212075