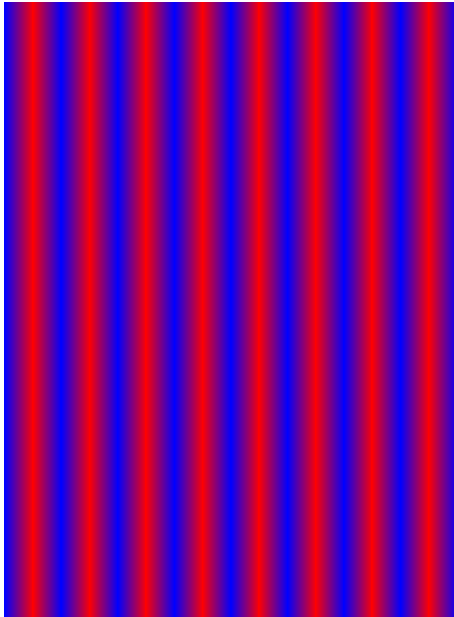
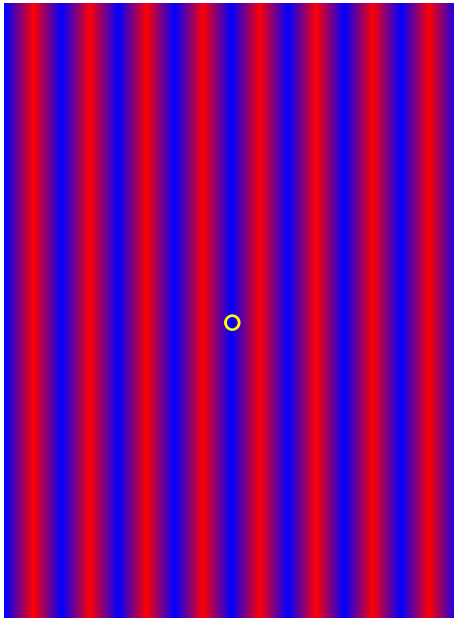


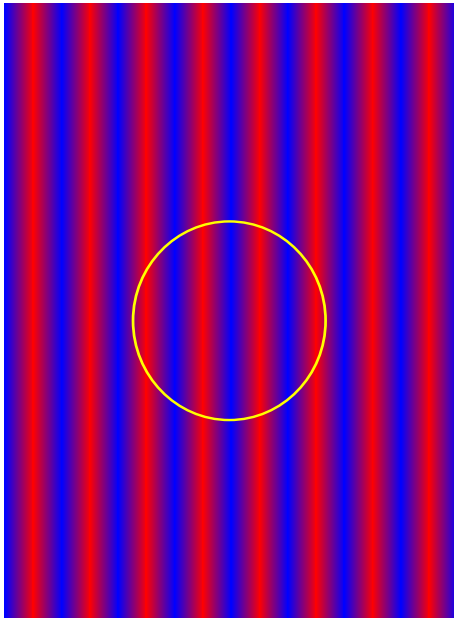
Fizyka niskich multipoli w CMB

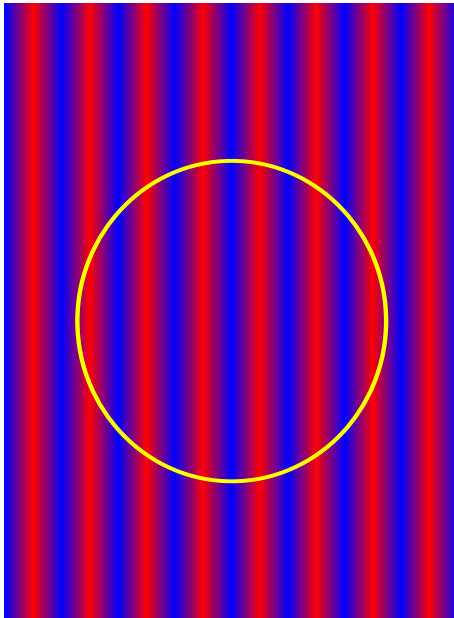
Jakub Mielczarek

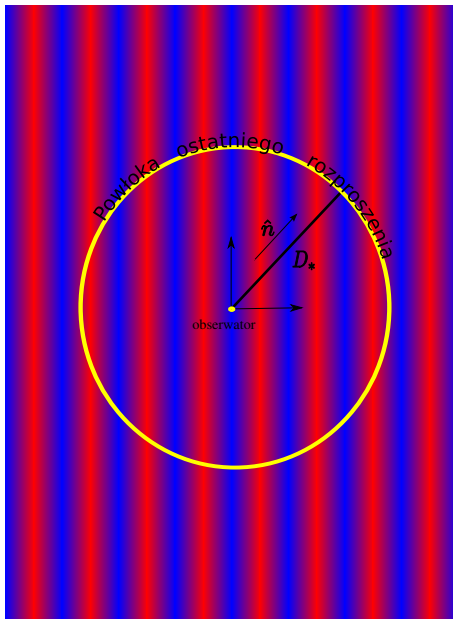
30 czerwca, 2008











Mikrofalowe promieniowanie tła charakteryzuje się widmem ciała doskonale czarnego

$$f(\nu, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\exp(2\pi\nu/T(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0)) - 1}$$

gdzie

$$T(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \bar{T} (1 + \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0)).$$

Odstępstwo od stałego rozkładu temperatury definiujemy jako

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \equiv \frac{T(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) - \bar{T}}{\bar{T}}.$$

Ponadto:

$\hat{\mathbf{n}}$ - kierunek obserwacji na niebie,

\mathbf{x}_0 - pozycja przestrzenna obserwatora.

Funkcje $\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0)$ możemy rozbić na harmoniki sferyczne

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \sum_{lm} \Theta_{lm}(\mathbf{x}_0) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}),$$

które tworzą zupełną bazę ortogonalną.

Średnia przestrzenna:

$$\langle \dots \rangle_{\Sigma} = \int_{\Sigma} d^3x_0 \dots$$

Dla statystycznie izotropowych fluktuacji mamy

$$\langle \Theta_{lm}(\mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} = 0,$$

oraz

$$\langle \Theta_{lm}^*(\mathbf{x}_0) \Theta_{l'm'}(\mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l.$$

$$\begin{aligned}
\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} &= \sum_{lm, l'm'} \langle \Theta_{lm}^*(\mathbf{x}_0) \Theta_{l'm'}(\mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}') \\
&= \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}')
\end{aligned}$$

wykorzystując

$$P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}'),$$

dostajemy

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \sum_l C_l (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')$$

Jak powiązać przestrzenny rozkład temperatury $\Theta(\mathbf{x})$ z rozkładem temperatury obserwowanym przez obserwatora w punkcie \mathbf{x}_0 ?

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \sum_{lm} \Theta_{lm}(\mathbf{x}_0) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

$$\Theta(\mathbf{x}) \equiv \frac{T(\mathbf{x}) - \bar{T}}{\bar{T}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \int_{\Sigma} d^3x \Theta(\mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - D_* \hat{\mathbf{n}})$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{n}}D_*)}$$

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} = \int_{\Sigma} d^3 x_0 \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) = \dots$$

wprowadzając transformaty Fouriera

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0}$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_0}$$

$$\dots = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 x_0 d^3 k d^3 q \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{q})^* e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_0} = \dots$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3q \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{q})^* \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{k})^*
 \end{aligned}$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{n}} D_*)}$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0}$$

stąd

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k}) = \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} D_*}$$

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) \rangle_{\Sigma} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k})^* e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} D_*} e^{-i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}' D_*} = \dots$$

Rozbijamy fale płaskie na funkcje kuliste

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} D_*} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(kD_*) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}),$$

wykorzystujemy

$$P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}),$$

co daje

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} D_*} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kD_*) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}).$$

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |\Theta(\mathbf{k})|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}D_*} e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}'D_*} \\
&= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int d\Omega_k k^2 dk |\Theta(\mathbf{k})|^2 \sum_{lm,l'm'} i^l (i^{l'})^* j_l(kD_*) j_{l'}(kD_*) \times \\
&\quad \times Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{n}}') \dots
\end{aligned}$$

Korzystamy z ortogonalności harmoników sferycznych

$$\int d\Omega_k Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\dots = \sum_l \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} k^3 |\Theta(\mathbf{k})|^2 j_l^2(kD_*) \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}') = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} k^3 |\Theta(\mathbf{k})|^2 j_l^2(kD_*) P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')$$

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}', \mathbf{x}_0) \rangle_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \sum_l C_l (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')$$

Ostatecznie dostajemy wyrażenie na

widmo CMB:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} k^3 |\Theta(\mathbf{k})|^2 j_l^2(kD_*)$$

Dla modów ponadhoryzontalnych obowiązuje

przybliżenie Sachs'a-Wolfe'a:

$$\Theta(\mathbf{k}) = \frac{1}{3}\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{5}\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$$

gdzie:

$\Phi_{\mathbf{k}}$ - potencjał Bardeena,

$\mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ - zaburzenie krzywizy.

$\Phi_{\mathbf{k}}, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ - wyliczamy dla danego modelu powstawania zaburzeń.

Funkcja korelacji i widmo mocy

Rozważmy teraz funkcje korelacji dla $\phi(\mathbf{x})$. Z definicji

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\phi(\mathbf{x}) \rangle = \int d^3\mathbf{x} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\phi(\mathbf{x}).$$

Wstawiamy

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{q} \phi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

i dostajemy

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} |\phi_{\mathbf{k}}|^2 = \dots \end{aligned}$$

$$\dots = \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\phi \frac{\sin(kr)}{kr}$$

gdzie zdefiniowaliśmy widmo mocy

$$\mathcal{P}_\phi \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\phi_{\mathbf{k}}|^2.$$

Np. dla \mathcal{R} mamy $|\mathcal{R}_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. Ponadto dzięki $\Theta(\mathbf{k}) = \frac{1}{5} \mathcal{R}_{\mathbf{k}}$ mamy

$$C_l = \frac{2}{\pi} \frac{1}{25} \int \frac{dk}{k} k^3 |\mathcal{R}_{\mathbf{k}}|^2 j_l^2(kD_*)$$

a stąd

$$C_l = \frac{4}{25} \pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} j_l^2(kD_*).$$

$$C_l = \frac{4}{25} \pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_l^2(kD_*).$$

C_l - obserwacje

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ - teoria

Przykład: Slow-roll inflation

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{Ha} \right)^{n_{\mathcal{R}} - 1}$$

gdzie

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon.$$

Dla $n_{\mathcal{R}} = 1$ dostajemy

$$C_l = \frac{1}{25} \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x} j_l^2(x).$$

Wykorzystując $\int_0^\infty \frac{dx}{x} j_l^2(x) = 1/[2l(l+1)]$ dostajemy

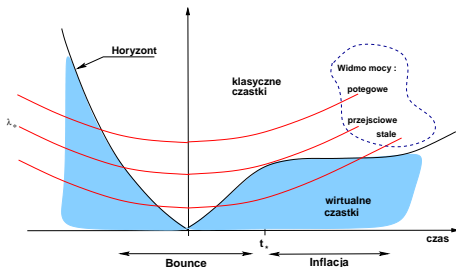
$$\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l = \frac{1}{25} \frac{1}{8\pi^2\epsilon} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 = \text{const}$$

Definiujemy:

$$C_l \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l.$$

Chociaż C_l jest bezwymiarowe, zazwyczaj mnoży się je przez \bar{T}^2 i podaje wartość C_l w $[\mu\text{K}^2]$. $\bar{T} = 2.725 \pm 0.001$ K.

Ewolucja horyzontu w modelu bounce+inflacja.



Wyjściowe widmo będzie miało postać

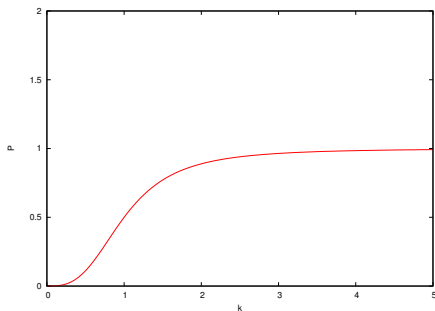
$$\mathcal{P}(k) \propto k^3, \quad k \ll k_*.$$

oraz

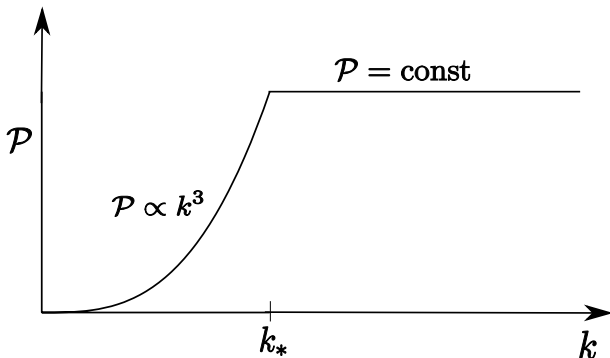
$$\mathcal{P}(k) = \text{const}, \quad k \gg k_*.$$

Widmo dla modelu bounce+inflacja jest jakościowo odzyskiwane z

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{A} \left(\frac{k}{k_*} \right)^3 \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_*} \right)^3}$$



$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{A}\Theta(k - k_*) + \mathcal{A}\Theta(k_* - k) \left(\frac{k}{k_*}\right)^3$$



Dla niskich multipoli mamy

$$C_l = \frac{4}{25} \pi \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_l^2(kD_*).$$

gdzie

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{A} \Theta(k - k_*) + \mathcal{A} \Theta(k_* - k) \left(\frac{k}{k_*} \right)^3.$$

Wykorzystując $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ dostajemy

$$C_l = \frac{2\pi^2}{25} \mathcal{A} \left[\frac{1}{x_*^3} \int_0^{x_*} \frac{dx}{x} x^3 \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} + \int_{x_*}^\infty \frac{dx}{x} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} \right]$$

gdzie $x = D_* k$ a $x_* = D_* k_*$.

Wykorzystujemy całki

$$\int \frac{dx}{x} x^3 \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} = \frac{1}{2} x^2 \left(J_{\frac{1}{2}(2l+1)}^2(x) - J_{\frac{1}{2}(2l+1)}(x) J_{\frac{1}{2}(2l+1)+1}(x) \right),$$

$$\int \frac{dx}{x} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} = \frac{4^{-l-1} x^{2l} {}_1F_2(l; l + \frac{3}{2}, 2l + 2; -x^2)}{\Gamma^2(l + \frac{3}{2})}$$

oraz

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} = \frac{1}{l(l+1)\pi}.$$

Ponadto ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, a_q; x=0) = 1$. Stąd

$$\int_{x_*}^\infty \frac{dx}{x} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}^2(x)}{x} = \frac{1}{l(l+1)\pi} - \frac{4^{-l-1} x_*^{2l} {}_1F_2(l; l + \frac{3}{2}, 2l + 2; -x_*^2)}{\Gamma^2(l + \frac{3}{2})}$$

Ostatecznie dostajemy

$$C_l = \frac{2\pi^2}{25} \mathcal{A} \left[\frac{1}{x_*} \frac{1}{2} \left(J_{\frac{1}{2}(2l+1)}^2(x_*) - J_{\frac{1}{2}(2l+1)}(x_*) J_{\frac{1}{2}(2l+1)+1}(x_*) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{l(l+1)\pi} - \frac{4^{-l-1} x_*^{2l} {}_1F_2(l; l + \frac{3}{2}, 2l + 2; -x_*^2)}{\Gamma^2(l + \frac{3}{2})} \right]$$

lub

$$C_l = \frac{2\pi^2}{25} \mathcal{A} \left[\frac{1}{\pi} \left(j_l^2(x_*) - j_l(x_*) j_{l+1}(x_*) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{l(l+1)\pi} - \frac{4^{-l-1} x_*^{2l} {}_1F_2(l; l + \frac{3}{2}, 2l + 2; -x_*^2)}{\Gamma^2(l + \frac{3}{2})} \right]$$

W granicy $x_* \rightarrow 0$ (brak bounce'u) mamy

$$\lim_{x_* \rightarrow 0} C_l = \frac{\mathcal{A}}{25} \frac{2\pi}{l(l+1)}$$

czyli

$$\lim_{x_* \rightarrow 0} C_l \equiv \lim_{x_* \rightarrow 0} \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l = \frac{\mathcal{A}}{25} = C_l^{\text{inflacja}}.$$

Możemy więc zapisać

$$C_l = C_l^{\text{inflacja}} + \Delta C_l(x_*).$$

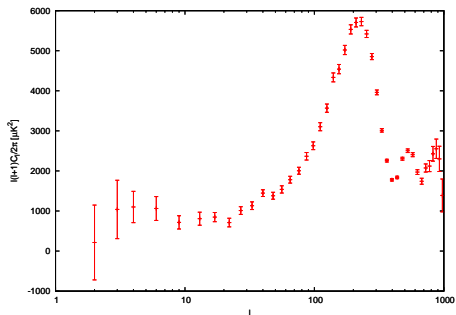
gdzie $\lim_{x_* \rightarrow 0} \Delta C_l(x_*) = 0$.

Dane obserwacyjne

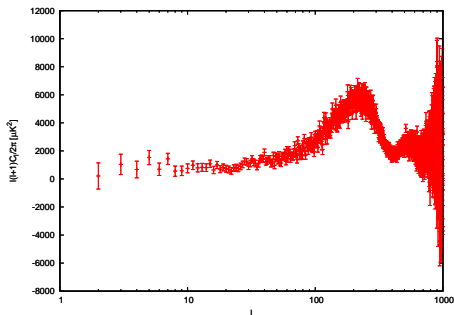
<http://lambda.gsfc.nasa.gov/>

Dostępne widma TT, TE, EE, BB z pięcioletnich obserwacji misji WMAP.

Widmo TT:



Widmo TT:



Dodatek1: Wyrażenie na Θ_{lm}

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} \Theta_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}D_*}$$

$$\sum_{lm} \Theta_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}D_*}$$

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}D_*} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(kD_*) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}})$$

$$P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}} D_*} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kD_*) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

$$\sum_{lm} \Theta_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) 4\pi i^l j_l(kD_*) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

$$\Theta_{lm} = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}) i^l j_l(kD_*) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})$$