Fale uderzeniowe na wodzie - *kilwater*

Jakub Mielczarek

30 października, 2009

Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Równanie Eulera:

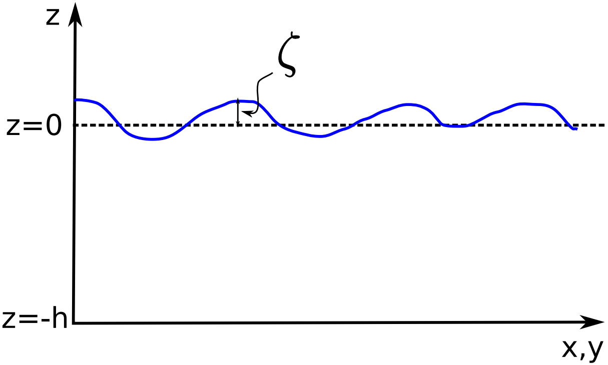
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}$$

(Robimy tu przybliżenie tzw. "suchej wody", czyli nie uwzględniamy lepkości). Woda jest nieściśliwa, więc $\rho = \text{const}$. Równanie ciągłości implikuje więc $\nabla \mathbf{v} = 0$.
Zakładamy, że przepływ jest bezwirowy, wtedy $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. W takim przypadku pole wektorowe $\mathbf{v}$ możemy wyrazić jako $\mathbf{v} = \nabla \Phi$.
Ponieważ $\nabla \mathbf{v} = 0$, to

$$\nabla^2 \Phi = 0.$$

Czyli potencjał Φ spełnia równanie Laplace'a.

Fale na wodzie



Ogólne rozwiązanie dla fal na wodzie ma postać

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(z)e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}.$$

Chcemy teraz znaleźć postać funkcji $\phi(z)$ oraz relację pomiędzy ω a k_x i k_y (relację dyspersji dla fal na wodzie).

Wstawiając $\Phi(\mathbf{x}, t)$ do równania Laplace'a $\nabla^2\Phi = 0$ dostajemy

$$\frac{d\phi(z)}{dz} - k^2\phi(z) = 0$$

gdzie $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Rozwiązaniem równania jest

$$\phi(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}.$$

Aby wyznaczyć współczynniki A i B należy wykorzystać warunki brzegowe:

$p|_{z=\zeta} = p_0$ (ciśnienie na powierzchni wody jest równe p_0)

$v_z|_{z=-h} \equiv \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$ (prędkość wody na dnie znika)

Na podstawie warunków brzegowych dostajemy

$$\begin{aligned} A(\omega^2/kg - 1) + B(\omega^2/kg + 1) &= 0 \\ Ae^{-kh} - Be^{kh} &= 0 \end{aligned}$$

co można zapisać jako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\omega^2/kg - 1) & (\omega^2/kg + 1) \\ e^{-kh} & -e^{kh} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Układ równań ma nietrywialne rozwiązanie jeśli $\det M = 0$.

Z tego warunku dostajemy relację dyspersji dla fal na wodzie:

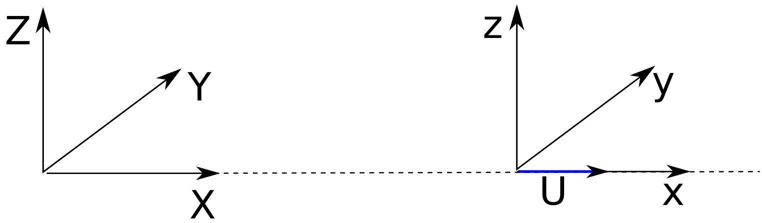
$$\omega^2 = kg \tanh(kh)$$

Dla głębokiej wody $kh \gg 1$ mamy $\omega = \sqrt{kg} = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}$.

Układ brzegu (X, Y, Z) i układ łódki (kaczki) (x, y, z) związane są przez

$$
\begin{aligned}
X &= x + Ut \\
Y &= y \\
Z &= z
\end{aligned}
$$

gdzie U jest predkością łódki (kaczki) względem brzegu.



Rozkład fal jest stacjonarny względem statku (kaczki). Fale nie odrywają się od rufy.

W układzie brzegu fala płaska ma postać

$$\Phi(\mathbf{X}, t) = A\cosh[k(Z+h)]e^{i(K_X X + K_Y Y - \omega t)}$$

gdzie $K_X = K\cos\theta$ oraz $K_Y = K\sin\theta$. Natomiast w układzie statku ta fala transformuje się do

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = A\cosh[k(z+h)]e^{iK(x\cos\theta + y\sin\theta) - i(\omega - KU\cos\theta)t}$$

Rozkład względem statku jest stacjonarny, więc

$$\omega - KU\cos\theta = 0.$$

Ponieważ $\omega - KU\cos\theta = 0$ gdzie $\omega = \sqrt{gK}$ to w kierunku θ, tylko fale o długości

$$\lambda(\theta) = \frac{2\pi U^2\cos^2\theta}{g}$$

będą tworzyć rozkład stacjonarny względem statku.

Jak wyznaczyc położenie czoła fali udzerzeniowej? Będzie to miejsce gdzie faza fali jest stacjonarna. W innych miejscach faza będzie szybko oscylować i wkłady dodatnie zniosą się z wkładami ujemnymi. Stąd, musi być spełniony warunek

$$\frac{d}{dK}\left(K\cos\theta X + K\sin\theta Y - \omega t\right) = 0.$$

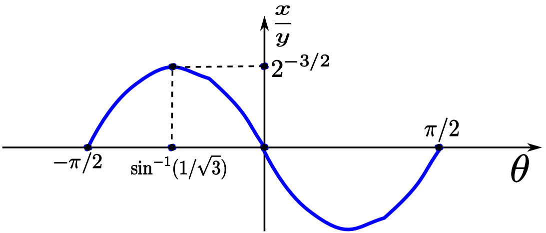
(Metoda zastosowana przez Lorda Kelvina).

Przechodząc do układu statku (x, y, z) i wykorzystując stacjonarność rozkładu dostajemy

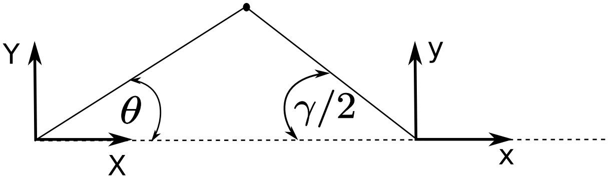
$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{g}{U^2\cos^2\theta}\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right)\right] = 0$$

Rozwiaząniem tego warunku jest antysymetryczna funkcja

$$\frac{y}{x} = -\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}$$



Maksimum i minimum funkcji x/y odpowiada granicom obszaru falowego, czyli frontowi falowemu.



Z geometrii

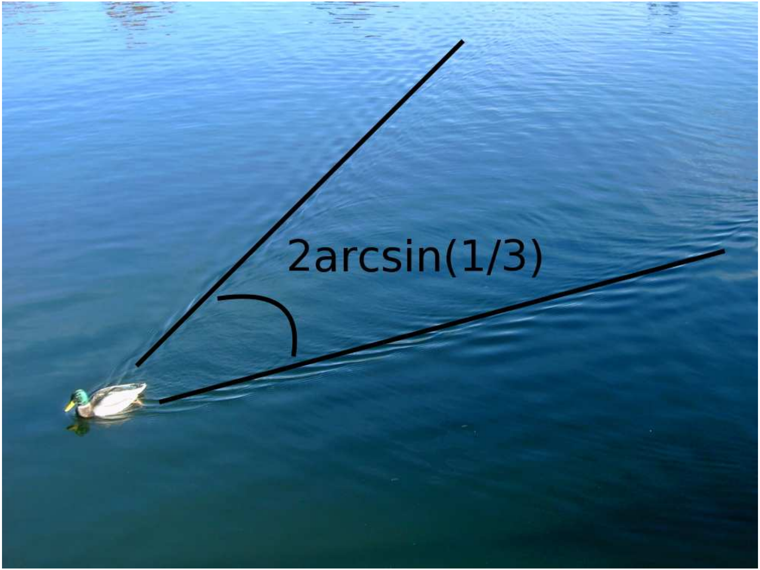
$$\frac{y}{x} = -\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Front uderzeniowy mamy dla $y/x = -2^{-3/2}$. Stąd

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2^{-3/2} \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Czyli ostatecznie

$$\gamma = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \;\approx\; 38^\circ.$$


2arcsin(1/3)

- Kąt rozwarcia frontu falowego jest niezależny od prędkości oraz rozmiarów źródła.
- Wartość kąta rozwarcia frontu wynosi $\gamma = 2\text{arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38^\circ$.
- Wartość ta nie jest cechą tylko wody; każda nieściśliwa ciecz o niskiej lepkości wykazuje takie zachowanie.
- Zjawitsko bazuje na teorii liniowej płynu idealnego i nie ma związku z turbulencją.