Reliktowe grawitony z Pętlowej Grawitacji Kwantowej

Jakub Mielczarek

16 Maja, 2007

- Semiklasyczna dynamika w Pętlowej Grawitacji Kwantowej
- Widmo zaburzeń tensorowych z kwantowej super-infacji
- Reliktowych grawitony z Pętlowej Grawitacji Kwantowej

Operator odwrotnej objętości

$$\widehat{d(a)}_{\mu}^{(j,l)} = \left(\frac{9}{l_{pl}^2 lj(j+1)(2j+j)} \sum_{k=-j}^{j} k|p_{\mu+2k}|^l \right)^{3/(2-2l)}$$

Efekty kwantowe zaczynają być istotne przy

$$a_* = \sqrt{\frac{\gamma j}{3}} l_{pl}$$

gdzie γ to parametr Barbero-Immirzi

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}}$$

wyznaczony ze zgodności dla entropii czarnych dziur.

$$d_j(a) = D(q)\frac{1}{a^3}$$

gdzie q jest zdefiniowane jako

$$q \equiv \frac{a^2}{a_*^2}$$

dla semi-klasycznego wszechświata ($l_{pl} < a \ll a_*$) poprawka kwantowa ma postać

$$\begin{aligned} D(q) &= q^{-3/2}\left\{\frac{3}{2l}\left(\frac{1}{l+2}\left[(q+1)^{l+2} - |q-1|^{l+2}\right]\right.\right. \\ &- \left.\left.\frac{q}{1+l}\left[(q+1)^{l+1} - \mathrm{sgn}(q-1)|q-1|^{l+1}\right]\right)\right\}^{3/(2-2l)} . \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} d_j(a) p_\phi^2 + a^3 V(\phi) \ \ \text{gdzie} \ \ p_\phi = d_j^{-1}(a)\dot{\phi}$$

To prowadzi do równania ruchu

$$\ddot{\phi} + \left(3H\dot{\phi} - \frac{\dot{D}}{D}\right) + D\frac{dV}{d\phi} = 0$$

Równaie Friedmana i Raychaudhuriego dla wszechświata z polem skalarnym mają postać

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2D} + V(\phi)\right] \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{D}\left(1 - \frac{\dot{D}}{4HD}\right) - V(\phi)\right]. \end{aligned}$$

$$\dot{H} = -4\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{D}\left(1 - \frac{\dot{D}}{6HD}\right).$$

Dzięki poprawce kwantowej D w obszarze semiklasycznym ($l_{pl} < a \ll a_*$), wyrażenie w nawiasie może być ujemne prowadząc do $\dot{H} > 0$ (super-infacja). Dla $a \gg a_* \ \Rightarrow \ D \approx 1$ prowadząc do $\dot{H} < 0$ (deceleracja). Dla $a \ll a_*$ dobrym przybliżeniem jest

$$D(q) \approx \left(\frac{3}{1+l}\right)^{3/(2-2l)} \left(\frac{a}{a_*}\right)^{3(2-l)/(1-l)}$$

Wykorzystując to wyrażenie liczymy dynamikę w obszarze semiklasycznym. Teraz

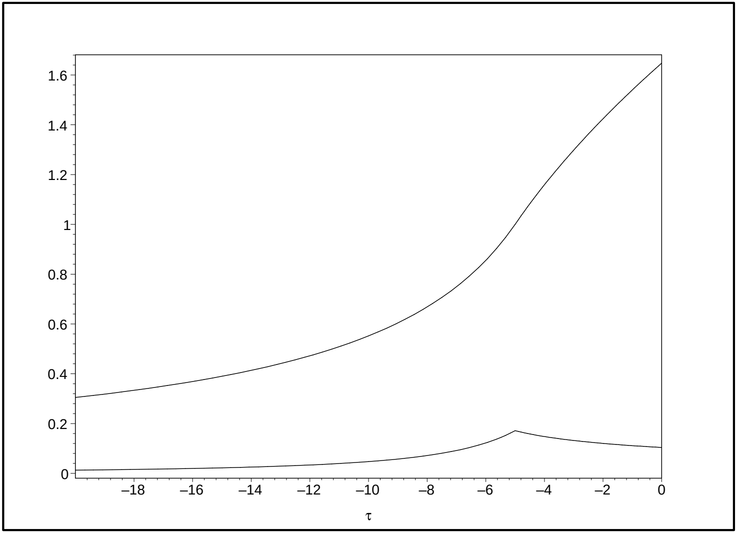
$$\frac{\dot{D}}{HD} = \frac{3(2-l)}{1-l} \ > 6$$

Warunki zszycia dla rozwiązań:

$$
\begin{aligned}
a_1(-\tau_0) &= a_2(-\tau_0) \\
a_1'(-\tau_0) &= a_2'(-\tau_0).
\end{aligned}
$$

Rozwiazania:

$$
\begin{aligned}
a_1(\tau) &= a_* \left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-2\frac{1-l}{2+l}} \quad \text{dla} \quad \tau < -\tau_0 \\
a_2(\tau) &= a_* \sqrt{4\frac{1-l}{2+l}\left(\frac{\tau_0+\tau}{\tau_0}\right)+1} \quad \text{dla} \quad \tau > -\tau_0 \quad .
\end{aligned}
$$


1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
–18
–16
–14
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
τ

Widmo zaburzeń tensorowych z kwantowej super-infacji

Tensorowe zaburzenie h_{ij} do metryki FRW zapisujemy w postaci

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j\right]$$

gdzie $|h_{ij}| \ll 1$. To zaburzenie odpowiada falom grawitacyjnym z dwoma stopniami swobody. To pozwala na dekompozycje

$$h_{ij} = h_+ e^+_{ij} + h_\times e^\times_{ij}$$

gdzie

$$e^+_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad e^\times_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zaburzone równanie Einsteina, w przestrzeni Fouriera, ma postać

$$h_j^{i''} + 2\mathcal{H} h_j^{i'} + k^2 h_j^i = 0$$

Wporwadzając zmienną $\mu = ah$ możemy to równanie zapisać w postaci

$$\mu_{\vec{k}}'' + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] \mu_{\vec{k}} = 0.$$

Dla super-inflacyjnej fazy dostajemy

$$\mu_k = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2k}} \sqrt{-k\tau} H^{(1)}_{\beta+\frac{1}{2}}(-k\tau)$$

gdzie

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi(\nu+1/2)/2}$$

Normalizaja ze zgodności z $e^{-ik\tau}/\sqrt{2k}$ dla $k \ll 1$.

Dla superhoryzonatlnych modów

$$H_\nu^{(1)}(-k\tau) \simeq -\frac{i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(-\frac{k\tau}{2}\right)^{-\nu}$$

Z definicji

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{4l_{pl}^2}{a^2\pi^2}k^3|\mu_k|^2$$

Widmo zaburzeń tensorowych

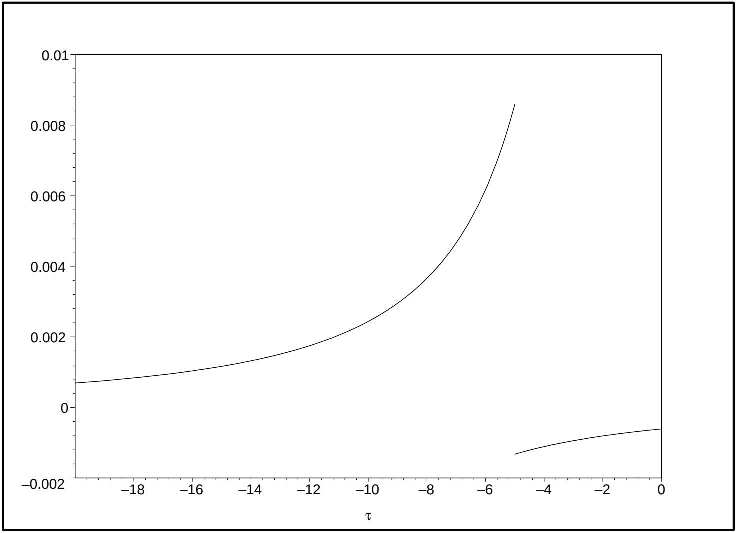
$$\mathcal{P}_T(k) = \mathcal{A}_T^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T}$$

gdzie

$$n_T = \frac{d\ln\mathcal{P}_T}{d\ln k} = \frac{6l}{2+l}$$

oraz

$$\mathcal{A}_T^2 = \frac{H^2}{m_p^2}\frac{2^{2\beta+1}}{\pi}\Gamma^2(\beta+1/2)$$


0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
–0.002
–18
–16
–14
–12
–10
–8
–6
–4
–2
0
τ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\hat{\mu}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\mu}^{\dagger}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[\hat{\pi}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\pi}^{\dagger}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

gdzie $\pi = \mu'$, oraz

$$[\hat{\mu}(\vec{x},\tau), \hat{\pi}(\vec{x},\tau)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Dla $a_1(\tau) = a_*(-\tau/\tau_1)^{-\beta}$ z $\beta = 2\frac{1-l}{2+l}$ mamy

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{\vec{k}}(\tau) &= \hat{a}_{\vec{k}} f_1(k,\tau) + \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} f_1^*(k,\tau) \quad \text{for} \quad \tau < -\tau_0 \\
\hat{\pi}_{\vec{k}}(\tau) &= \hat{a}_{\vec{k}} g_1(k,\tau) + \hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} g_1^*(k,\tau) \quad \text{for} \quad \tau < -\tau_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(k,\tau) &= \frac{\mathcal{N}_1}{\sqrt{2k}} \sqrt{-k\tau} H^{(1)}_\nu(-k\tau) \\
g_1(k,\tau) &= -\mathcal{N}_1 \sqrt{\frac{k}{2}} \sqrt{-k\tau} \left[-H^{(1)}_{\nu+1}(-k\tau) + \frac{1+2\nu}{2(-k\tau)} H^{(1)}_\nu(-k\tau) \right]
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{N}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi(\nu+1/2)/2} \quad \text{oraz} \quad \nu = \beta + \frac{1}{2}$$

Dla $a_2(\tau) = a_* \sqrt{4\frac{1-l}{2+l}\left(\frac{\tau_0+\tau}{\tau_0}\right)+1}$ mamy

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{\vec{k}}(\tau) &= \hat{b}_{\vec{k}} f_2(k,\tau) + \hat{b}^{\dagger}_{-\vec{k}} f_2^*(k,\tau) \quad \text{for} \quad \tau > -\tau_0 \\
\hat{\pi}_{\vec{k}}(\tau) &= \hat{b}_{\vec{k}} g_2(k,\tau) + \hat{b}^{\dagger}_{-\vec{k}} g_2^*(k,\tau) \quad \text{for} \quad \tau > -\tau_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(k,\tau) &= \mathcal{N}_2 \sqrt{1+4\frac{1-l}{2+l}\left(\frac{\tau_0+\tau}{\tau_0}\right)} H_0^{(2)}(k\tau+k\zeta)\exp(ik\zeta) \\
g_2(k,\tau) &= \frac{\mathcal{N}_2}{\tau_0}\left[\frac{H_0^{(2)}(k\tau+k\zeta)}{\sqrt{1+4\frac{1-l}{2+l}\left(\frac{\tau_0+\tau}{\tau_0}\right)}}\frac{2(1-l)}{2+l} - k\tau_0\sqrt{1+4\frac{1-l}{2+l}\left(\frac{\tau_0+\tau}{\tau_0}\right)} H_1^{(2)}(k\tau+k\zeta)\right]\exp(ik\zeta)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{N}_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\tau_0}\sqrt{\frac{2+l}{1-l}} e^{-i\pi/4} \quad \text{oraz} \quad \zeta = \tau_0 \frac{3}{4}\frac{2-l}{1-l}$$

Transformacja Bogoliubova-Valatina :

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\vec{k}} &= B_+(k)\hat{a}_{\vec{k}} + B_-(k)^*\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \\ \hat{b}^\dagger_{\vec{k}} &= B_+(k)^*\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} + B_-(k)\hat{a}_{-\vec{k}}\end{aligned}$$

korzystając z wcześniejszych rozkałdow na operatoty kreacji i anihilacji dostajemy

$$\begin{aligned}f_1(-\tau_0) &= B_+(k)f_2(-\tau_0) + B_-(k)f_2^*(-\tau_0) \\ g_1(-\tau_0) &= B_+(k)g_2(-\tau_0) + B_-(k)g_2^*(-\tau_0)\end{aligned}$$

Lub rozwiązując na współczyniki Bogoliubova

$$\begin{aligned}B_-(k) &= \frac{f_1(-\tau_0)g_2(-\tau_0) - g_1(-\tau_0)f_2(-\tau_0)}{f_2^*(-\tau_0)g_2(-\tau_0) - g_2^*(-\tau_0)f_2(-\tau_0)} \\ B_+(k) &= \frac{f_1(-\tau_0)g_2^*(-\tau_0) - g_1(-\tau_0)f_2^*(-\tau_0)}{f_2(-\tau_0)g_2^*(-\tau_0) - g_2(-\tau_0)f_2^*(-\tau_0)}\end{aligned}$$

Przejście między dwoma stanami próżni powoduje produkcję cząstek (grawiatonow)

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\langle 0|[\hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}} + \hat{b}^{\dagger}_{-\vec{k}}\hat{b}_{-\vec{k}}]|0\rangle = |B_{-}(k)|^2$$

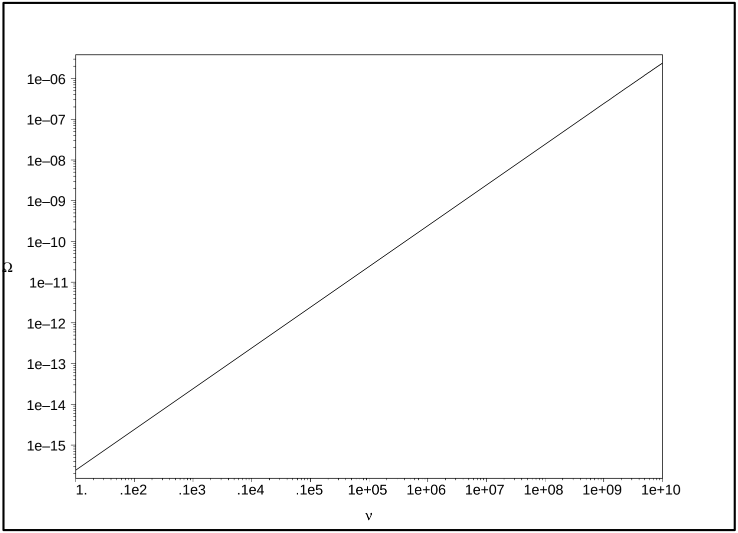
Gestość wyprodukowanych grawitonow wyliczamy z

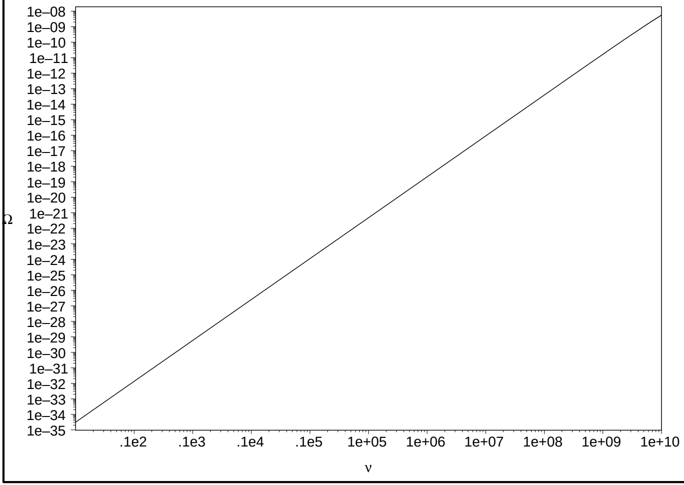
$$d\rho_{gw} = 2 \cdot \hbar\omega \frac{dk^3}{(2\pi)^3}\bar{n}_{\vec{k}}$$

Zazwyczaj gestość tła grawitonowego opisujemy parametrem

$$\Omega_{gw}(\nu, \tau) = \frac{1}{\rho_{\text{crit}}}\frac{d\rho_{GW}}{d\ln\nu}$$

Ograniczenie z obserwacji LIGO: $\Omega_{gw} < 6.5 \cdot 10^{-5}$.


1e–06
1e–07
1e–08
1e–09
1e–10
Ω
1e–11
1e–12
1e–13
1e–14
1e–15
1.
.1e2
.1e3
.1e4
.1e5
1e+05
1e+06
1e+07
1e+08
1e+09
1e+10
ν


1e–08
1e–09
1e–10
1e–11
1e–12
1e–13
1e–14
1e–15
1e–16
1e–17
1e–18
1e–19
1e–20
1e–21
1e–22
1e–23
1e–24
1e–25
1e–26
1e–27
1e–28
1e–29
1e–30
1e–31
1e–32
1e–33
1e–34
1e–35
Ω
.1e2
.1e3
.1e4
.1e5
1e+05
1e+06
1e+07
1e+08
1e+09
1e+10
ν