

# Kosmologiczna kreacja pól magnetycznych

Jakub Mielczarek

16 grudzień, 2008

# Jaki jest problem?

- W galaktykach spiralnych obserwuje się koherentne pole magnetyczne o wartości  $B \approx 1\mu\text{G}$ .
- Międzygalaktyczne pole magnetyczne  $B \approx 1\text{nG}$  skorelowane na odległościach  $\leq 1\text{ Mpc}$ .

Proces dynamo odpowiedzialny za produkcję galaktycznego pola magnetycznego wymaga istnienia pola pierwotnego.

Możliwe schematy *Bottom – up* (pole małoskalowe  $\rightarrow$  pole wielkoskalowe) *Top – down* (kosmologiczne pole wielkoskalowe  $\rightarrow$  pole małoskalowe).

Jaki jest mechanizm powstawania pola wielkoskalowego?

# Jakie rozwiązania daje kosmologia?

- **Łamanie konforemnej niezmienniczości** oddziaływań elektromagnetycznych podczas fazy inflacji. Istnieje wiele mechanizmów łamania klasycznej niezmienniczości konforemnej elektrodynamiki (np. anomalia śladowa, dylaton). Modele takie dają pożądane wielkości pola magnetycznego w oparciu o fazę inflacji.
- **Przejścia fazowe pierwszego rodzaju** we wczesnym wszechświecie. Niestety przejścia fazowe pierwszego rodzaju w Modelu Standardowym są mało prawdopodobne.
- **Produkcja stochastycznych niejednorodności** w wyniku kosmologicznej asymetrii ładunku. Wymaga istnienia nowej fizyki lub modele ze sterylnymi neutrinami.

# Konforemna niezmienniczość działania $S_{EM}$

Działanie dla elektrodynamiki minimalnie sprzężonej z grawitacją ma postać

$$S_{EM}[A_\mu, g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

gdzie

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Rozważmy przekształcenie metryki w postaci

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \tilde{g}_{\mu\nu},$$

które nazywamy transformacją konforemną. Ponieważ

$\sqrt{-g} = \Omega^4 \sqrt{-\tilde{g}}$  oraz  $g^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} \tilde{g}^{\mu\nu}$  mamy

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\sigma} \text{ czyli } S_{EM}[A_\mu, g_{\mu\nu}] = S_{EM}[A_\mu, \tilde{g}_{\mu\nu}].$$

Rozważmy wszechświat z płaską metryką FRW

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)(d\mathbf{x})^2.$$

Metrykę tę możemy zapisać w postaci

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$$

gdzie  $\Omega^2 = a^2$  oraz  $[\tilde{g}_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Dlatego metrykę FRW nazywamy konforemnie płaską. Stąd dla metryki FRW mamy

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \rightarrow \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}.$$

Działanie elektrodynamiki w przestrzeni z metryką FRW możemy więc zapisać jako

$$S_{EM}[A_\mu, g_{\mu\nu}] = S_{EM}[A_\mu, \eta_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} \int d\eta d^3\mathbf{x} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

gdzie czas konforemny  $d\eta = dt/a$ .

# Twierdzenie o znikaniu śladu

## Twierdzenie:

Dla każdego klasycznego pola z konforemnie niezmienniczym działaniem (jak np. pole elektromagnetyczne), ślad tensora energii-pędu znika  $T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0$ .

## Dowód:

Rozważmy infinitezymalną transformację konforemną  $\Omega(x) = 1 + \delta\Omega(x)$ . Stąd  $\delta g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}\delta\Omega(x)$  oraz  $\delta g^{\mu\nu} = -2g^{\mu\nu}\delta\Omega(x)$ . Wariując działanie

$$0 = \delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta\Omega(x)$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję  $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ . Warunek  $0 = \delta S$  jest spełniony dla każdego  $\delta\Omega(x)$  jeśli  $T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$ , co kończy dowód.

# Jak złamać konforemną niezmienniczość?

- Nie-minimalne sprzężenie pola elektromagnetycznego z grawitacją

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + C_1 R A_\mu A^\mu + C_2 R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu \right]$$

- Oddziaływanie z polem dylatonowym

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

- Anomalia konforemna

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} (-g)^{\frac{\kappa}{8}} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

## Uwaga:

Symetrie teorii klasycznych niekoniecznie pozostają symetriami teorii po kwantowaniu. Jeśli symetria klasyczna nie jest symetrią teorii kwantowej takie zachowanie nazywamy *anomalią*.

Klasycznie mieliśmy  $T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0$  dla teorii z symetrią konforemną. Na poziomie kwantowym w ogólności  $\langle T^{\mu\nu} \rangle g_{\mu\nu} \neq 0$ . Zachowanie takie nazywamy *Anomalią konforemną* (lub anomalią śladową czy trójkątną).

## Przykład: Anomalia chiralna

W fizyce cząstek powszechnie znana jest anomalia chiralna.

Klasyczny lagrangian dla bezmasowej cząstki ze spinem

$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi$  jest niezmienniczy względem transformacji

$\psi \rightarrow \psi e^{i\theta}$  oraz  $\psi \rightarrow \psi e^{i\theta \gamma^5}$ . Klasycznie daje to zachowanie prądu

$\partial_\mu J_5^\mu = 0$  na poziomie kwantowym natomiast  $\partial_\mu J_5^\mu \neq 0$ .



# Model z anomalią konforemną

Działanie ma postać

$$S_{EM}^*[A_\mu, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (-g)^{\frac{\kappa}{8}} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}.$$

W metryce FRW mamy (wykonując transformację konforemną)

$$S_{EM}^*[A_\mu, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int d^4x a^\kappa \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}.$$

Stąd

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0$$

oraz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -a^\kappa F^{\alpha\beta}.$$

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = 0$$

przyjmuje więc postać

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \kappa \frac{\partial_\mu a}{a} F^{\mu\nu} = 0.$$

Wstawiając  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  dostajemy

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) + \kappa \frac{\partial^\mu a}{a} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0$$

gdzie  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\partial_\eta^2 + \nabla^2$ .

Na podstawie symetrii cechowania  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  eliminujemy niefizyczne stopnie swobody. W cechowaniu Lorentza  $\partial^\mu A_\mu = 0$  stąd

$$\begin{aligned} \square A_0 &= 0, \\ \left[ \square - \kappa \frac{a'}{a} \partial_\eta \right] A_i + \kappa \frac{a'}{a} \partial_i A_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ równanie na  $A_0$  nie zależy od ewolucji kosmologicznej możemy wziąć  $A_0 = 0$  (co pokrywa się z cechowaniem Colulomba). Wtedy

$$\left[ -\frac{d^2}{d\eta^2} - \kappa \frac{a'}{a} \frac{d}{d\eta} + \nabla^2 \right] A_i(\mathbf{x}, \eta) = 0.$$

Przejdźmy do zmiennych fourierowskich

$$A_i(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} A_i(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Z rzeczywistości potencjału wektorowego mamy

$A_i(\mathbf{k}, \eta) = A_i^*(-\mathbf{k}, \eta)$ , czyli możemy zapisać

$$A_i(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ A_i(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + A_i^*(\mathbf{k}, \eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right].$$

Dalej możemy rozisać  $A_i(\mathbf{k}, \eta) = 2A(k, \eta)c_k^i \epsilon_k^i$  co daje

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{T=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ A(k, \eta) c_k^T \epsilon_k^T e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + A^*(k, \eta) c_k^{*T} \epsilon_k^T e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right].$$

Stąd funkcje modów spełniają równanie

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \kappa \frac{a'}{a} \frac{d}{d\eta} + k^2 \right] A(k, \eta) = 0.$$

Wprowadzając nową zmienną

$$u(k, \eta) = a^{\frac{\kappa}{2}} A(k, \eta)$$

dostajemy równanie

$$\frac{d^2}{d\eta^2} u(k, \eta) + \left[ k^2 + \frac{\kappa}{2} \left( 1 - \frac{\kappa}{2} \right) \left( \frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \frac{a''}{a} \right] u(k, \eta) = 0.$$

Najprostszym modelem inflacji nie odwołującym się do natury tego procesu jest tak zwana faza de Sittera. Rozwiązanie tego typu pojawia się dla wszechświata ze stałą kosmologiczną  $\Lambda$ . W takim przypadku rozwiązanie równania Friedmanna ma postać

$$a(t) \propto e^{Ht}$$

gdzie  $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ . Przechodząc do czasu konforemnego  $d\eta = dt/a$  dostajemy natomiast

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\eta},$$

gdzie ustaliliśmy stałą całkowania równą zeru. Równanie modów przybiera więc postać

$$\frac{d^2}{d\tau^2} u(k, \eta) + \left[ k^2 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2} \right] u(k, \eta) = 0$$

gdzie  $\nu^2 = \frac{1}{4}(1 + \kappa)^2$ .

Ogólne rozwiązanie powyższego równania jest postaci

$$u(k, \eta) = \sqrt{-\eta} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left[ D_1 H_{|\nu|}^{(1)}(-\eta k) + D_2 H_{|\nu|}^{(2)}(-\eta k) \right].$$

Na podstawie rozwinięć

$$H_{\mu}^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[ix - i\mu\pi/2 - i\pi/4],$$

$$H_{\mu}^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[-ix + i\mu\pi/2 + i\pi/4],$$

widać, że rozwiązania pierwszego typu opowiadają modom adwansowanym,  $u \propto e^{-ik\eta}$ . Rozwiązania drugiego typu opowiadają natomiast modom retardowanym,  $u \propto e^{ik\eta}$ . Najczęściej fizycznie uzasadnione jest wybieranie rozwiązań adwansowanych, czyli biorąc  $D_1 = e^{i\alpha}$  oraz  $D_2 = 0$  gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Stałą  $\alpha$  ustalamy ze zgodności z funkcją modów w przestrzeni Minkowskiego. Mianowicie w przestrzeni Minkowskiego funkcja modów przybiera znaną postać

$$u(k, \eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}.$$

Odpowiadać to będzie rozważanej granicy wysokoenergetycznej dla której rozwiązania adwansowane przyjmują postać

$$u(k, \eta) \rightarrow \sqrt{-\eta} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{-\pi k \eta}} e^{-ik\eta - i\mu\pi/2 - i\pi/4} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} e^{i\alpha - i\mu\pi/2 - i\pi/4},$$

stąd

$$\alpha = \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$



Ostatecznie dostajemy

$$A(k, \eta) = a^{-\frac{\kappa}{2}} \sqrt{-\eta} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{|\nu|\pi}{2} + i\frac{\pi}{4}} H_{|\nu|}^{(1)}(-\eta k).$$

Na skalach super-horyzontalnych ( $-\eta k \ll 1$ ) możemy zastosować przybliżenie

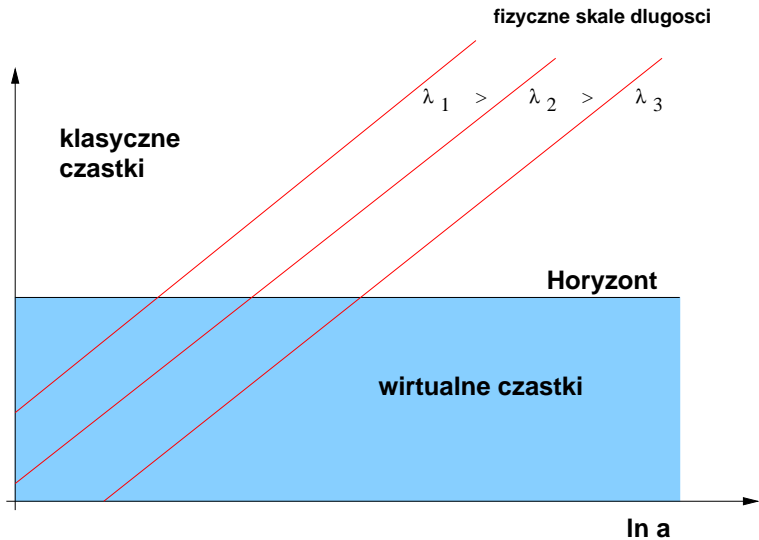
$$H_{|\nu|}^{(1)}(x) \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(|\nu|) \left(\frac{x}{2}\right)^{-|\nu|}.$$

Stąd

$$|A(k, \eta)|^2 = \frac{2^{|\kappa+1|-2}}{\pi} \Gamma^2(|\nu|) \frac{H^\kappa}{k^{|\kappa+1|}} (-\eta)^{1+\kappa-|\kappa+1|}.$$

Dla  $\kappa + 1 \geq 0$  mamy

$$|A(k, \eta)|^2 = \frac{2^\kappa}{\pi} \Gamma^2(|\nu|) \left(\frac{H}{k}\right)^\kappa \frac{1}{2k}.$$



Ponieważ  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , to na podstawie

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

dostajemy

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \eta) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Definiujemy funkcję korelacji jako

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \eta) \rangle = \int d^3x \mathbf{B}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \eta).$$

Biorąc

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \eta) = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

oraz

$$\mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \eta) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}^*(\mathbf{k}, \eta) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})}$$

dostajemy

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \eta) \rangle = \int d^3 k [|\mathbf{k}|^2 |\mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta)|^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta)|^2] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Dotaliśmy więc związek pomiędzy wyznaczoną wcześniej funkcją  $\mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta)$  a obserwowaną funkcją korelacji  $\langle B(0)B(r) \rangle$ .