

PRODUKCJA FAL GRAWITACYJNYCH W PĘTLOWEJ KOSMOLOGII KWANTOWEJ

Jakub Mielczarek

Praca magisterska
na kierunku Astronomia

Opiekun pracy:
Dr hab. Marek Szydłowski

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

2008

Streszczenie

W pracy badamy kreacje fal grawitacyjnych podczas fazy bounce'u inspirowanego przez Pętlową Kosmologię Kwantową. Rozważamy wpływ poprawek od holonomii kwantowych na równanie na mody tensorowe. Pokazujemy, że działając jak efektywna masa grawitonu, tłumią one produkcje fal grawitacyjnych. Efekt ten może być traktowany perturbacyjnie. Rozważamy uproszczony model bez efektów holonomii w równaniu modów i znajdujemy jego ściśle analityczne rozwiązanie. Otrzymane widmo maleje do zera dla modów niskoenergetycznych. Bazując na tej obserwacji wskazujemy ten efekt jako możliwe wytłumaczenie tłumienia niskich multipoli w widmie Mikrofalowego Promieniowania Tła (CMB). Proponujemy także model z fazą inflacyjną w następstwie bounce'u dający jakościowe wytłumaczenie wyników obserwacji widma CMB, włączając tłumienie niskich multipoli. Ostatecznie przedstawiamy obecnie znane metody badania reliktowych fal grawitacyjnych. Pokazujemy jak mogą być one użyte do testowania scenariusza kosmologicznego bounce'u.

Abstract

In this thesis we investigate gravitational waves creation during the Big Bounce phase inspired by the Loop Quantum Cosmology. We consider the influence of the holonomy corrections to the equation for tensor modes. We show that they act like additional effective graviton mass suppressing gravitational waves production. However this effects can be treated perturbatively. We investigate simplified model without these corrections and find its exact analytical solution. For this model we calculate spectrum of the gravitational waves from the Big Bounce phase. Obtained spectrum decrease to zero for the low energy modes. Based on this observation we indicate that this effect can explain low CMB multipoles suppression and give potential method to test Loop Quantum Cosmology models. The same effect is realized for the scalar modes. We also propose a model with post-bounce inflationary phase. Obtained power spectrum give qualitative explanation of the CMB spectra, including low multipoles suppression. Finally we review present and future constraints on the relic gravitational waves. We show how they can be used to test the Big Bounce scenario.

*Jeżeli chcesz odkryć coś ważnego, pracuj tylko nad pytaniami, z których można wypro-
wadzić przewidywania eksperymentalne.*

Richard P. Feynman (w rozmowie z Lee Smolinem)

*Dziękuję Panu Dr hab. Markowi Szydłowskiemu, opiekunowi mojej pracy magister-
skiej, za współpracę, poświęcony mi czas oraz za cenną naukę samodzielnego stawiania
i rozwiązywania problemów.*

Spis treści

1	Wstęp	7
2	Kosmologiczne fale grawitacyjne	10
2.1	Równanie na mody tensorowe w formalizmie kanonicznym	10
2.1.1	Zmienne Ashtekara	12
2.1.2	Tensorowe perurbacje Hamiltonianu	13
2.2	Kosmologiczna kreacja cząstek	15
2.2.1	Fluktuacje kwantowe	16
2.2.2	Kwantowanie fal grawitacyjnych - grawitony	18
2.2.3	Funkcja korelacji i widmo mocy	20
2.2.4	Transformacja Bogoliubova i liczba produkowanych grawitonów	21
2.2.5	Gęstość energii grawitonów i parametr Ω	21
2.3	Produkcja fal grawitacyjnych podczas inflacji	22
2.3.1	Widmo mocy dla fazy de Sittera	22
2.3.2	Widmo mocy dla slow-roll inflation	24
3	Pętlowa kosmologia kwantowa	27
3.1	Elementy Pętlowej Grawitacji Kwantowej	27
3.2	Pętlowa Kosmologia Kwantowa	31
3.3	Fenomenologia bounce'u	34
4	Produkcja fal grawitacyjnych w kosmologii pętlowej	37
4.1	Uwagi o wczesnych próbach wyznaczenia widma fal grawitacyjnych w LQC	37
4.2	Produkcja fal grawitacyjnych podczas Big Bounce'u - Toy model	37
4.2.1	Dynamika tła	38
4.2.2	Funkcje modów	38
4.2.3	Funkcja korelacji i widmo mocy	41
4.2.4	Liczba i gęstość energii grawitonów	43
4.3	Widmo mocy z fazy pre-Bounce'u	45

4.4	Poprawki kwantowe od holonomii	47
4.4.1	Efekty poprawki T_Q	48
4.4.2	Wstępne rozważania numeryczne	49
4.4.3	Bounce+Inflacja	51
5	Ograniczenia obserwacyjne	53
5.1	Fale grawitacyjne a Mikrofalowe Promieniowanie Tła	53
5.1.1	Widmo polaryzacji CMB	54
5.2	Interferometry grawitacyjne	55
5.3	Fale grawitacyjne a pierwotna nukleosynteza	56
5.4	Timing pulsarów	57
6	Podsumowanie	59
7	Dodatki	61
7.1	Tożsamość Abela	61
7.2	Wrońskian w teorii pola	62
7.3	Normalizacja rozwiązań z funkcjami Bessela	63
	Bibliografia	67

Lista publikacji

Lista prac powstałych podczas studiów magisterskich:

- O. Hrycyna, J. Mielczarek and M. Szydłowski,
“Effects of the quantisation ambiguities on the Big Bounce dynamics,”
arXiv:0804.2778 [gr-qc].
- J. Mielczarek and M. Szydłowski,
“Universe from vacuum in loop-string cosmology,”
arXiv:0803.1742 [hep-th].
- J. Mielczarek and M. Szydłowski,
“Emerging singularities in the bouncing loop cosmology,”
arXiv:0801.1073 [gr-qc]. (przyjęte do druku w Physical Review D)
- J. Mielczarek, T. Stachowiak and M. Szydłowski,
“Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology,”
arXiv:0801.0502 [gr-qc]. (przyjęte do druku w Physical Review D)
- J. Mielczarek and M. Szydłowski,
“Relic gravitons from super-inflation,”
arXiv:0710.2742 [gr-qc].
- J. Mielczarek and M. Szydłowski,
“Relic gravitons as the observable for Loop Quantum Cosmology,”
Phys. Lett. B **657** (2007) 20 [arXiv:0705.4449 [gr-qc]].
- J. Mielczarek, T. Stachowiak and M. Szydłowski,
“Vortex in axion condensate as a dark matter halo,”
arXiv:0705.3017 [astro-ph].

1 Wstęp

Jedną z konsekwencji zasad mechaniki kwantowej jest relacja nieoznaczoności energii i czasu. Mianowicie mówi ona że energia układu może w czasie Δt zmienić się o ΔE , przy czym

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1)$$

Relacja ta prowadzi do szeregu ciekawych wniosków. W szczególności zastosowanie jej do pola grawitacyjnego prowadzi do obrazu fluktuującej czasoprzetrzeni, w której następuje ciągle kreacja i anihilacja wirtualnych kwantów. Mody fluktuacji są charakteryzowane przez długości fali λ które przy dostatecznie dużych energiach $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ mogą osiągać skale długości porównywalne z promieniem Schwarzschilda $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ gdzie $\Delta E = Mc^2$. W takim przypadku fluktuacje zaczynają kolapsować prowadząc do powstawania czarnych dziur. Spełniony jest wtedy warunek

$$\lambda \approx \frac{GM}{c^2} = \frac{hG}{c^3 \lambda}, \quad (1.2)$$

którego rozwiązaniem jest

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{hG}{c^3}}. \quad (1.3)$$

Otrzymana skala odległości odpowiada tak zwanej długości Plancka którą definiujemy jako

$$l_{Pl} \equiv \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \approx 1.62 \times 10^{-35} \text{ m}. \quad (1.4)$$

Jak widać, przy takich skalach możemy się spodziewać drastycznych zaburzeń pola grawitacyjnego i własności geometrycznych czasoprzestrzeni. Klasyczne pojęcie czasoprzetrzeni traci tu sens i dalsze stosowanie opisu bazującego na Ogólnej Teorii Względności staje się nieadekwatne. Właściwą teorią do opisu zjawisk grawitacyjnych poniżej skali Plancka jest wciąż poszukiwana Kwantowa Teoria Grawitacji. Pomimo że istnieje obecnie kilku poważnych kandydatów do miana takiej teorii, brak możliwości weryfikacji empirycznej stawia te teorie w bardzo niekomfortowej sytuacji. Bez ograniczeń, potwierdzeń czy wskazówek od strony doświadczenia teorie takie mogą się swobodnie rozwijać jako teorie matematyczne nie pozostając jednak w związku ze światem fi-

zycznym. Niestety nie ma obecnie optymistycznych prognoz co do możliwości badań kwantowych efektów grawitacji w laboratorium. Energie niezbędne do ich badania nie są możliwe do osiągnięcia z obecną generacją akceleratorów. Akcelerator LHC (Large Hadron Collider), którego uruchomienie planowane jest na lato tego roku (2008), ma osiągać energie 14 TeV w zderzeniu $p\bar{p}$. Efektów kwantowej grawitacji spodziewamy się natomiast przy energiach porównywalnych z energią Plancka

$$E_{\text{Pl}} \equiv \frac{\hbar c}{l_{\text{Pl}}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1.22 \times 10^{16} \text{ TeV}. \quad (1.5)$$

Obecne zdolności doświadczalne są więc piętnaście rzędów wielkości poniżej spodziewanej skali energii zjawisk kwantowograwitacyjnych. Tylko nagły skok cywilizacyjny pozwoliłby więc na bezpośrednie laboratoryjne badanie zjawisk w skali energii Plancka.

Jeśli więc bezpośrednie eksperymentalne metody stoją daleko poza naszym zasięgiem to czy istnieje inny sposób badania efektów kwantowej grawitacji? Okazuje się że tak i są nimi obserwacje astronomiczne. Jedną z takich potencjalnych możliwości jest badanie wysokoenergetycznych cząstek (fotonów) przybywających do nas z odległych źródeł astrofizycznych. Metoda ta polega na idei kumulowania się kwantowograwitacyjnych efektów na skalach kosmologicznych. W szczególności efekty te prowadzą do modyfikacji relacji dyspersji rzędu E/E_{Pl} . Dla cząstek przemierzających skalę kosmologiczną efekty takich małych poprawek kumulują się, mogąc prowadzić do efektów obserwacyjnych. Dla fotonów jest to różnica czasu przybycia od energii. Niestety te potencjalne efekty mogą być falsyfikowalne. Mianowicie mogą one wynikać także z natury źródła promieniowania. Czytelnika zainteresowanego tym zagadnieniem odsyłamy do prac [1, 2].

Druga metoda opiera się na obserwacji pozostałości po tzw. Wielkim Wybuchu, czyli po etapie w historii Wszechświata w którym kwantowe efekty grawitacji miały istotne znaczenie. Szczególnie ważną klasą takich reliktyw są fale grawitacyjne, których badaniu poświęcimy niniejszą pracę. Fale te wyprodukowane we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata mogą przetrwać “zamrożone” na skalach super-horyzontalnych. W ten sposób mogą one nieść cenną informację o kwantowograwitacyjnej fazie Wszechświata.

Nasze rozważania będziemy prowadzić w ramach Pętlowej Kosmologii Kwantowej (Loop Quantum Cosmology - LQC) [3]. Teoria ta bazuje na kowariantnym podejściu do kwantowania grawitacji zwanym Pętlową Grawitacją Kwantową (Loop Quantum Gravity - LQG) [4]. Doniosłym wynikiem LQC jest usuwanie osobliwości kosmologicznej [5]. Początkowa osobliwość jest mianowicie zastępowana fazą kwantowego bounce’u [6]. W takim scenariuszu wszechświat podlega początkowo kontrakcji a

następnie dzięki “odpychaniu kwantowemu” przechodzi do obecnej fazy ekspansji. Dynamika ta będzie dla nas podstawą dla procesu kreacji fal grawitacyjnych.

Kreacja grawitonów w Pętłowej Kosmologii Kwantowej była początkowo badana w ramach fazy super-inflacji [7, 8]. Następnie w pracy [9] zostały wyliczone równania modów tensorowych z uwzględnieniem poprawek od holonomii. Równania te ostatnio zastosowano do opisu kreacji fal grawitacyjnych w fazie inflacji [10]. W niniejszej pracy będziemy rozważać kreacje fal grawitacyjnych w fazie bounce’u naturalnie pojawiającego się w Pętłowej Kosmologii Kwantowej.

2 Kosmologiczne fale grawitacyjne

Możliwość kosmologicznej produkcji fal grawitacyjnych została zaproponowana w latach siedemdziesiątych przez Grishchuka [11]. Od tamtego czasu zjawisko to było obiektem intensywnych badań, szczególnie w kontekście inflacji. Mianowicie wynika to z faktu, że w akcelerującym wszechświecie fale grawitacyjne są bardzo wydajnie produkowane. Powstałe podczas inflacji grawitony wypełniają całą przestrzeń w postaci tak zwanego stochastycznego tła. Razem z zaburzeniami skalarnymi produkowanymi również podczas inflacji tworzą one pierwotne zaburzenia prowadzące do formowania się struktur. Wprowadzenie do zagadnienia stochastycznych fal grawitacyjnych można znaleźć w pracy [12].

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe własności kosmologicznych fal grawitacyjnych. Rozpocniemy od wyprowadzenia równania na mody tensorowe w formalizmie kanonicznym zmiennych Ashtekara. Takie podejście pozwoli nam w następnych rozdziałach na płynne przejście do teorii kwantowej. Poznamy też mechanizm kosmologicznej kreacji fal grawitacyjnych, który będzie podstawą naszych dalszych rozważań. Przedstawimy jego działanie na przykładzie kosmologicznej inflacji.

2.1 Równanie na mody tensorowe w formalizmie kanonicznym

Wyprowadzając równania na mody tensorowe będziemy bazować na hamiltonowskim sformułowaniu teorii grawitacji w zmiennych ADM. Zaczniemy więc od przypomnienia podstaw tego sformułowania. W podejściu takim zakłada się mianowicie foliację czasoprzestrzeni M w postaci $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ gdzie Σ jest rozmaitością przestrzenną. Hiperpowierzchnie Σ_t są numerowane przez globalną funkcję czasu t , co zobrazowano na Rys. 2.1. Metryka w takiej przestrzeni może być zapisana jako

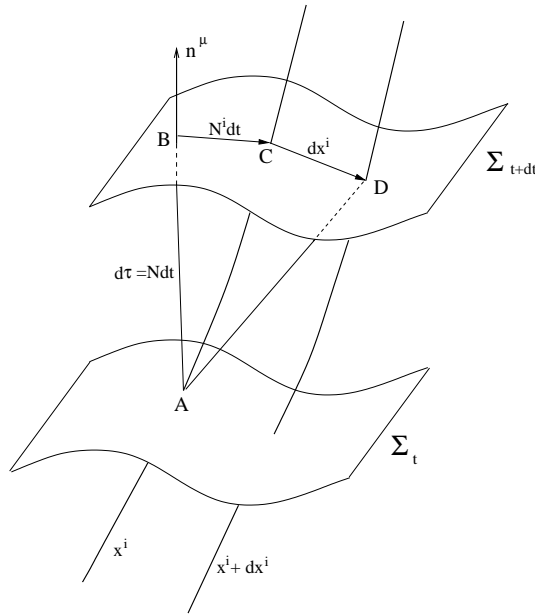
$$ds^2 = -\omega^0 \otimes \omega^0 + q_{ab}\omega^a \otimes \omega^b \quad (2.1)$$

gdzie 1-formy

$$\omega^0 = Ndt, \quad (2.2)$$

$$\omega^a = dx^a + N^a dt. \quad (2.3)$$

Wielkość N jest tak zwaną funkcją lapse. Mierzy ona różnicę pomiędzy czasem współrzędnościowym a czasem właściwym τ na krzywej normalnej do hiperpowierzchni Σ_t . Wielkość N^a to tak zwany shift vector. Mierzy on przesunięcie pomiędzy danym punktem przestrzennym a punktem który osiągnęlibyśmy podążając wzdłuż normalnej do hiperpowierzchni Σ . Współrzędne są nazywane współporuszającymi gdy $N^a = 0$. Wielkość q_{ab} to metryka na hiperpowierzchni przestrzennej Σ .



Rysunek 2.1: Dekompozycja $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ czasoprzestrzeni w zmiennych ADM.

Jak więc widać metrykę $g_{\mu\nu}$ na rozmaiitości M możemy wyrazić przez zmienne (N, N^a, q_{ab}) . Za ich pomocą możemy przetransformować działanie Hilberta-Einsteina do postaci

$$S[q_{ab}, \pi^{ab}, N_a, N] = \frac{1}{16\pi G} \int dt \int_{\Sigma} d^3x \left[\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{H} \right], \quad (2.4)$$

gdzie zdefiniowaliśmy gęstość Hamiltonianu

$$\mathcal{H}(q_{ab}, \pi^{ab}, N_a, N) = N_b V^b(q_{ab}, \pi^{ab}) + N S(q_{ab}, \pi^{ab}), \quad (2.5)$$

natomiast $V^b(q_{ab}, \pi^{ab})$ to tak zwany więz wektorowy, a $S(q_{ab}, \pi^{ab})$ to więz skalarny.

Wprowadzona zmienna π^{ab} to kanoniczny pęd

$$\pi^{ab} \equiv 16\pi G \frac{\delta S}{\delta \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q}(K^{ab} - Kq^{ab}). \quad (2.6)$$

Wykorzystano tu definicję krzywizny zewnętrznej

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - N_{a|b} - N_{b|a}] \quad (2.7)$$

oraz $K = K_{ab}q^{ab}$.

2.1.1 Zmienne Ashtekara

Rozważmy teraz część przestrzenną Σ , na której zadana jest metryka q_{ab} . Może być ona wyrażona przez ko-triady ω_a^i w następujący sposób

$$q_{ab} = \omega_a^i \omega_b^j \delta_{ij}. \quad (2.8)$$

Jak widać, wyrażenie to jest niezmiennicze ze względu na obroty $SO(3)$ w indeksach $i, j = 1, 2, 3$, które dalej będziemy nazywać grupowymi. Możemy więc ko-triady ω_a^i rozważać jako pola o indeksie przestrzennym $a = 1, 2, 3$ oraz indeksie grupowym $i = 1, 2, 3$. Dalej jednak zamiast grupy $SO(3)$ będziemy rozważać izomorficzną do niej grupę $SU(2)$. Kuszacą jest idea wykorzystania tej grupy jako grupy symetrii dla teorii grawitacji. Istotnie udało się to zrobić Ashtekarowi wprowadzając odpowiednie zmienne. W tych nowych zmiennych teoria grawitacji przyjmuje formę teorii Yanga-Millsa z grupą cechowania $SU(2)$.

Zmienne Ashtekara ($A = A_a^i \tau_i dx^a, E = E_i^a \tau^i \partial_a$) są zdefiniowane jako

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (2.9)$$

$$E_i^a = \sqrt{|\det q|} e_i^a \quad (2.10)$$

gdzie Γ_a^i jest koneksją spinową

$$\Gamma_a^i = -\epsilon^{ijk} e_j^b (\partial_{[a} e_{b]}^k + \frac{1}{2} e_k^c e_a^l \partial_{[c} e_{b]}^l) \quad (2.11)$$

oraz $K_a^i := K_{ab} e_i^b$ gdzie K_{ab} jest dane przez (2.7).

Hamiltonian dla grawitacji w zmiennych Ashtekara przyjmuje postać sumy więzów

$$H_G = \int_{\Sigma} d^3 \mathbf{x} (N^i G_i + N^a C_a + NS). \quad (2.12)$$

Więź dyfeomorfizmów przestrzennych wyraża się jako

$$C_a = E_i^b F_{ab}^i - (1 - \gamma^2) K_a^i G_i. \quad (2.13)$$

Więź Gaussa wyraża się jako

$$G_i = D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a. \quad (2.14)$$

Więź skalarny wyraża się jako

$$S = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \left[\epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] \quad (2.15)$$

gdzie $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ jest krzywizną koneksji Ashtekara A .

Koneksja A oraz kanonicznie do niej sprzężona gęstość triady E spełniają elementarny nawias Poissona

$$\{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.16)$$

gdzie

$$\{M(\mathbf{x}), N(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \int_{\Sigma} d^3 \mathbf{z} \left[\frac{\delta M(\mathbf{x})}{\delta A_b^j(\mathbf{z})} \frac{\delta N(\mathbf{y})}{\delta E_j^b(\mathbf{z})} - \frac{\delta N(\mathbf{x})}{\delta A_b^j(\mathbf{z})} \frac{\delta M(\mathbf{y})}{\delta E_j^b(\mathbf{z})} \right]. \quad (2.17)$$

2.1.2 Tensorowe perutrbcje Hamiltonianu

Zaburzenia tensorowe płaskiej metryki FRW wprowadzamy w następujący sposób

$$g_{00} = -N^2 + q_{ab} N^a N^b = -a^2, \quad (2.18)$$

$$g_{0a} = q_{ab} N^b = 0, \quad (2.19)$$

$$g_{ab} = q_{ab} = a^2 [\delta_{ab} + h_{ab}], \quad (2.20)$$

gdzie wybraliśmy cechowanie $N = a$. Dla zaburzeń tensorowych h_{ab} spełniony jest warunek $h_a^a = \partial_a h_b^a = 0$, co daje 1 + 3 więzów. Ponieważ h_{ab} jest tensorem symetrycznym o wymiarze 3×3 posiada on 6 niezależnych składowych. Odejmując od tego powyższe 4 więzy dostajemy dwie niezależne składowe tensora h_{ab} , odpowiadające dwóm stanom polaryzacji grawitonu. W cechowaniu TT dwie niezależne składowe to $h_1^1 = -h_2^2 = h_{\oplus}$ oraz $h_2^1 = h_1^2 = h_{\otimes}$. Dalej będziemy zakładać $|h_{ab}| \ll 1$, co pozwoli nam na perturbacyjne traktowanie zaburzeń tensorowych.

Rozważmy ogólną postać zaburzeń zmiennych Ashtekara

$$E_i^a = \bar{E}_i^a + \delta E_i^a, \quad (2.21)$$

$$A_a^i = \bar{A}_a^i + \delta A_a^i. \quad (2.22)$$

Dla rozważanego przypadku płaskiej metryki tła łatwo wyliczamy niezaburzone części zmiennych Ashtekara

$$\bar{E}_i^a = \bar{p}\delta_i^a, \quad (2.23)$$

$$\bar{A}_a^i = \gamma\bar{k}\delta_a^i, \quad (2.24)$$

gdzie $\bar{p} = a^2$ oraz $\bar{k} = \dot{\bar{p}}/2\bar{p}$. Ponadto można pokazać że

$$\delta\Gamma_a^i = \frac{1}{\bar{p}}\epsilon^{ij e}\delta_{ac}\partial_e\delta E_j^c. \quad (2.25)$$

Wprowadzając zaburzone zmienne Ashtekara do Hamiltonianu (2.12) dostajemy z dokładnością do wyrazów kwadratowych [9]

$$H_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left[-6\bar{k}\sqrt{\bar{p}} - \frac{\bar{k}^2}{2\bar{p}^{3/2}}(\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) + \sqrt{\bar{p}}(\delta K_c^j \delta_a^k \delta_k^c \delta_j^d) - \frac{2\bar{k}}{\sqrt{\bar{p}}}(\delta E_j^c \delta K_c^j) + \frac{1}{\bar{p}^{3/2}}(\delta_{cd}\delta^{jk}\delta^{ef}\partial_e E_j^c \partial_f E_k^d) \right]. \quad (2.26)$$

Rozważając równanie Hamiltona

$$\delta\dot{K}_a^i = \{\delta K_a^i, H_G + H_m\} \quad (2.27)$$

i wstawiając

$$K_a^i = \frac{1}{2} [\dot{h}_a^i + \bar{k}h_a^i] \quad (2.28)$$

dostajemy ostatecznie równanie na mody tensorowe w postaci

$$\frac{1}{2} [\ddot{h}_a^i + 2\bar{k}\dot{h}_a^i - \nabla^2 h_a^i] = 8\pi G \Pi_a^i \quad (2.29)$$

gdzie

$$\Pi_a^i = \frac{1}{3V_0} \frac{\partial H_m}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}} \right) + \frac{\delta H_m}{\delta(\delta E_i^a)}. \quad (2.30)$$

Równanie to będzie podstawą naszych dalszych rozważań.

2.2 Kosmologiczna kreacja cząstek

W poprzednim podrozdziale wyprowadziliśmy klasyczne równanie na mody tensorowe. W przypadku bezźródłowym możemy je zapisać w standardowej postaci

$$h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}h'_{\mu\nu} + k^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.31)$$

gdzie

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}. \quad (2.32)$$

Dokonałiśmy tu ponadto przejścia do zmiennych Fourierowskich. Mody tensorowe możemy rozbić na dwie niezależne składowe polaryzacji

$$h_{\mu\nu} = h_{\oplus} e^1_{\mu\nu} + h_{\otimes} e^2_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

gdzie

$$e^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad e^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Obie składowe polaryzacji h_{\oplus} oraz h_{\otimes} ewoluują w niezależny sposób. Wprowadzimy teraz nową zmienną w postaci

$$u = \frac{ah_{\oplus}}{\sqrt{16\pi G}} = \frac{ah_{\otimes}}{\sqrt{16\pi G}} \quad (2.35)$$

dla obu typów polaryzacji. Wprowadzenie czynnika $\sqrt{16\pi G}$ staje się jasne jeśli rozważymy zlinearyzowane działanie dla OTW. Mianowicie część kwadratowa w polu $h_{\mu\nu}$ równa jest

$$S_t = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x a^3 \sum_{i=\oplus, \otimes} \left[\dot{h}_i^2 - \frac{1}{a^2} (\vec{\nabla} h_i)^2 \right] \quad (2.36)$$

i przybiera w zmiennej u postać działania jak dla pola skalarnego

$$S_t = \frac{1}{2} \int d\tau d^3\mathbf{x} [u'^2 - \delta^{ij} \partial_i u \partial_j u - m_{\text{eff}}^2 u^2] \quad (2.37)$$

gdzie

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{a''}{a}. \quad (2.38)$$

Wariując powyższe działanie dostajemy równanie ruchu dla nowej zmiennej u w postaci

$$u'' + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] u = 0. \quad (2.39)$$

Rozważmy rozwiązania tego równania w przypadkach granicznych:

- $k^2 \gg |a''/a|$

Przypadek ten odpowiada granicy wysokoenergetycznej, w której funkcje u “nie czują” ewolucji kosmologicznej i mają oscylacyjny typ rozwiązań. Stąd rozwiązanie na mody tensorowe ma postać

$$h_i \simeq \frac{e^{\pm ik\tau}}{a}. \quad (2.40)$$

W przypadku ekspansji wszechświata mody te są kosmologicznie tłumione. Przeciwnie, podczas kontrakcji ulegają one kosmologicznej amplifikacji.

- $k^2 \ll |a''/a|$

Przypadek ten odpowiada granicy niskoenergetycznej w której ewolucja kosmologiczna ma istotny wpływ na ewolucje fal grawitacyjnych. Rozwiązanie na mody tensorowe ma w tym przypadku postać

$$h_i \simeq A_k + B_k \int^{\tau} \frac{dx}{a^2(x)}. \quad (2.41)$$

Jak widać rozwiązanie to posiada stałą składową A_k . Jest to niezwykle istotny fakt. Mianowicie fale grawitacyjne na skalach super-horyzontalnych pozostają “zamrożone” nie podlegając ewolucji kosmologicznej. Niosą tym samym cenną informację z wczesnych etapów ewolucji Wszechświata.

2.2.1 Fluktuacje kwantowe

Dotychczas pokazaliśmy, że na skalach super-horyzontalnych fale grawitacyjne pozostają “zamrożone” nie czując ewolucji kosmologicznej. Daje to im szansę przetrwania oraz późniejszego oddziaływania z materią prowadząc do potencjalnych efektów obserwacyjnych. Do tej kwestii powrócimy później. Teraz musimy cofnąć się wstecz

i odpowiedzieć na pytanie na temat pochodzenia kosmologicznych fal grawitacyjnych. Rozważać będziemy mianowicie proces kreacji cząstek z próżni kwantowej.

Aby go wyjaśnić rozważmy równanie (2.39) w reżimie wysokoenergetycznym $k^2 \gg |a''/a|$ czyli

$$u'' + k^2 u = 0. \quad (2.42)$$

Rozwiązania będą więc odpowiadać modom o długościach $\lambda \ll R_H$, gdzie R_H jest promieniem horyzontu kosmologicznego. Powyższe równanie jest równaniem oscylatora harmonicznego. Pole natomiast odpowiada zbiorowi takich oscylatorów dla wszystkich wartości k . Kwantowanie oscylatora harmonicznego wykonujemy wprowadzając operatory kreacji i anihilacji

$$\hat{u} = f(k, \tau) \hat{a} + f^*(k, \tau) \hat{a}^\dagger \quad (2.43)$$

dla których spełnione jest

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.44)$$

Ostatnia równość definiuje nam stan próżni $|0\rangle$. Komutator dla zmiennych kanonicznych przybiera postać $[\hat{u}, \hat{\pi}] = i$ gdzie $\hat{\pi} = \hat{u}'$. Pozwala nam to na znormalizowanie funkcji $f(k, \tau)$ które odpowiadają klasycznym rozwiązaniom, równań ruchu

$$f(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.45)$$

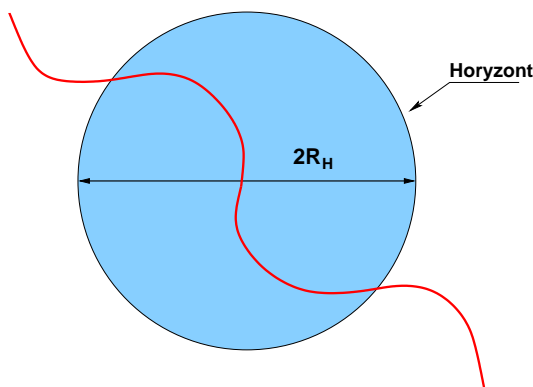
Wyliczając wartość średnią operatora \hat{u}^2 w stanie próżni dostajemy

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}^2 \rangle &= \langle 0 | \hat{u}^\dagger \hat{u} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle |f(k, \tau)|^2 \\ &= |f(k, \tau)|^2 = \frac{1}{2k}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Wynik ten jest odbiciem kwantowej natury rozważanego układu. Mianowicie każdy oscylator składający się na dane pole kwantowe posiada w stanie próżni skończoną energię. Stan taki ponadto wysyca zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Będziemy teraz starali się wykorzystać te niezerowe fluktuacje w stanie próżni do wykreowania rzeczywistych cząstek. Jak wiadomo jest to nie możliwe w przestrzeni Minkowskiego ponieważ stan próżni jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Innymi słowy w każdym układzie inercjalnym stan próżni wygląda tak samo, nie posiada cząstek rzeczywistych. Możliwa jest tylko kreacja i anihilacja cząstek wirtualnych niełamająca zasady nieoznaczoności Heisenberga. Inaczej kwestia ta wygląda w układach nieinercjalnych z

którymi mamy do czynienia w modelach kosmologicznych. W tym przypadku definicja cząstki rzeczywistej nie jest jednoznaczna i zależy od wyboru układu odniesienia. Dalej jako cząstki rzeczywiste będziemy rozumieć te które istnieją w układzie współporuszającym się.

Istotne staje się dalej pojęcie horyzontu kosmologicznego. Odpowiada on obszarowi przestrzeni będącego w kauzalnej koneksji. Rozważmy dany mod fluktuacji kwantowej próżni o długości λ . Jeśli mod taki znajdzie się w wyniku specyficznej ewolucji kosmologicznej ponad horyzontem staje się on klasyczną falą. Przedstawiono to schematycznie na Rys. 2.2



Rysunek 2.2: Przykład modu o długości fali λ porównywalnej z rozmiarami horyzontu.

Mody ponadhoryzontane nie podlegają ewolucji, pozostając klasycznymi cząstkami. Na powyższym zjawisku opiera się idea kosmologicznej kreacji cząstek. W następnych podrozdziałach podamy matematyczny formalizm umożliwiający ilościowy opis tego procesu.

2.2.2 Kwantowanie fal grawitacyjnych - grawitony

W tym podrozdziale będziemy rozważać pole tensorowe $h_{\mu\nu}$ jako pole kwantowe. Takie podejście prowadzi do koncepcji grawitonu czyli elementarnego wzbudzenia pola grawitacyjnego. Produkcji fal na poziomie klasycznym będzie odpowiadać produkcja grawitonów na poziomie kwantowym. Dalej zamiast operować na polu $h_{\mu\nu}$ będziemy rozważać pole u co uprości rozważania.

Równanie (2.39) może być otrzymane z działania w postaci

$$S_t = \frac{1}{2} \int d\tau d^3\mathbf{x} [u'^2 - \delta^{ij} \partial_i u \partial_j u - m_{\text{eff}}^2 u^2] \quad (2.47)$$

gdzie

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{a''}{a}. \quad (2.48)$$

Aby skwantować pole u wyznaczamy kanonicznie sprzężony pęd

$$\pi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\delta S_t}{\delta u'} = u'. \quad (2.49)$$

Zmiennym kanonicznym (u, π) przyporządkowujemy w teorii kwantowej operatory. Operatory tych pól możemy rozłożyć na mody Fourierowskie w postaci

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (2.50)$$

$$\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (2.51)$$

gdzie składowe Fourierowskie spełniają reguły komutacji

$$\left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau), \hat{\pi}_{\mathbf{p}}^\dagger(\tau) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (2.52)$$

$$\left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau)^\dagger, \hat{\pi}_{\mathbf{p}}(\tau) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (2.53)$$

$$\left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau), \hat{\pi}_{\mathbf{p}}(\tau) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{p}), \quad (2.54)$$

$$\left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau)^\dagger, \hat{\pi}_{\mathbf{p}}^\dagger(\tau) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{p}). \quad (2.55)$$

Na podstawie działania (2.47) dostajemy operator Hamiltona w postaci

$$\begin{aligned} \hat{H}_t &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{\pi}^2 + \delta^{ij} \partial_i \hat{u} \partial_j \hat{u} + m_{\text{eff}}^2 \hat{u}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} \left[\hat{\pi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \left[\hat{\pi}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\pi}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ &+ \delta^{ij} i \left[k_i \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - k_i \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] i \left[q_j \hat{u}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - q_j \hat{u}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ &+ m_{\text{eff}}^2 \left[\hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \left[\hat{u}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + \hat{u}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{\pi}_{\mathbf{k}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\pi}_{\mathbf{k}} + (k^2 + m_{\text{eff}}^2) \left(\hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{u}_{\mathbf{k}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Równania Hamiltona przyjmują natomiast postać

$$\hat{u}' = i[\hat{H}_t, \hat{u}], \quad (2.57)$$

$$\hat{\pi}' = i[\hat{H}_t, \hat{\pi}]. \quad (2.58)$$

Wykorzystując powyższe równania wraz z Hamiltonianem (2.56) oraz (2.50) i (2.51)

dostajemy

$$\hat{u}'_{\mathbf{k}} = \hat{\pi}_{\mathbf{k}}, \quad (2.59)$$

$$\hat{\pi}'_{\mathbf{k}} = -(k^2 + m_{\text{eff}}^2) \hat{u}_{\mathbf{k}}. \quad (2.60)$$

Rozwiązanie tych równań w języku operatorów kreacji i anihilacji ma postać

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) = \hat{a}_{\mathbf{k}} f(k, \tau) + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger f^*(k, \tau), \quad (2.61)$$

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\tau) = \hat{a}_{\mathbf{k}} g(k, \tau) + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger g^*(k, \tau). \quad (2.62)$$

gdzie $f(k, \tau)' = g(k, \tau)$. Wstawiając to do równań (2.50) oraz (2.51) dostajemy

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[f(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f^*(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (2.63)$$

$$\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[g(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + g^*(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (2.64)$$

Funkcje f i g spełniają ponadto warunek Wronskiego

$$f^*(k, \tau)g(k, \tau) - f(k, \tau)g^*(k, \tau) = -i \quad (2.65)$$

wyprowadzony w Dodatku 7.2. Bazując na równaniach ruchu (2.59), (2.60) oraz (2.61) dostajemy równanie na funkcje modów

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f(k, \tau) + [k^2 + m_{\text{eff}}^2] f(k, \tau) = 0. \quad (2.66)$$

2.2.3 Funkcja korelacji i widmo mocy

Wielkością bardzo przydatną w określaniu własności fluktuacji kwantowych jest funkcja korelacji

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{h}_b^a(\vec{x}, \tau) \hat{h}_a^b(\vec{y}, \tau) | 0 \rangle &= 4 \frac{16\pi G}{a^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f(k, \tau)|^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k, \tau) \frac{\sin kr}{kr}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Wprowadzono tu ponadto definicję widma mocy fluktuacji

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{64\pi G}{a^2} \frac{k^3}{2\pi^2} |f(k, \tau)|^2. \quad (2.68)$$

2.2.4 Transformacja Bogoliubova i liczba produkowanych grawitonów

Rozważmy początkowy stan próżniowy $|0_{\text{in}}\rangle$ wyznaczony przez $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0_{\text{in}}\rangle = 0$, gdzie $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ jest operatorem anihilacji dla τ_i . Relacja pomiędzy operatorami kreacji i anihilacji w stanie początkowym i końcowym dana jest przez transformacje Bogoliubova

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} = B_+(k)\hat{a}_{\mathbf{k}} + B_-(k)^*\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.69)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = B_+(k)^*\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + B_-(k)\hat{a}_{-\mathbf{k}}, \quad (2.70)$$

gdzie $|B_+|^2 - |B_-|^2 = 1$. Ponieważ pracujemy w obrazie Heisenberga stan próżni pozostanie niezmienny podczas ewolucji. To powoduje, że $\hat{b}_{\mathbf{k}}|0_{\text{in}}\rangle = B_-(k)^*\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger|0_{\text{in}}\rangle$ jest różne od zera jeśli $B_-(k)^*$ jest niezerową funkcją. Znaczy to, że w stanie końcowym pole nie jest już w stanie próżni nie zawierającej cząstek. Liczba wyprodukowanych cząstek jest dana przez

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\langle 0_{\text{in}} | [\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}] | 0_{\text{in}} \rangle = |B_-(k)|^2. \quad (2.71)$$

Wykorzystując (2.61) oraz (2.62) a także transformację Bogoliubova (2.69) i (2.70) dostajemy

$$\begin{aligned} B_-(k) &= \frac{f_i(k, \tau_i)g_f(k, \tau_f) - g_i(k, \tau_i)f_f(k, \tau_f)}{f_f^*(k, \tau_f)g_f(k, \tau_f) - g_f^*(k, \tau_f)f_f(k, \tau_f)} \\ &= i [f_i(k, \tau_i)g_f(k, \tau_f) - g_i(k, \tau_i)f_f(k, \tau_f)], \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} B_+(k) &= \frac{f_i(k, \tau_i)g_f^*(k, \tau_f) - g_i(k, \tau_i)f_f^*(k, \tau_f)}{f_f(k, \tau_f)g_f^*(k, \tau_f) - g_f(k, \tau_f)f_f^*(k, \tau_f)} \\ &= -i [f_i(k, \tau_i)g_f^*(k, \tau_f) - g_i(k, \tau_i)f_f^*(k, \tau_f)] \end{aligned} \quad (2.73)$$

gdzie uproszczenia pochodzą z zastosowania warunku Woroniańskiego (2.65).

2.2.5 Gęstość energii grawitonów i parametr Ω

Różniczkowa gęstość energii grawitonów równa jest

$$d\rho_{\text{gw}} = 2 \cdot \hbar\omega \cdot \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} \cdot |B_-(k)|^2, \quad (2.74)$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję (2.71). Czynniki dwa pochodzą natomiast od możliwych stanów spinowych grawitonu. Ważną wielkością do opisu fal grawitacyjnych jest paramter

$$\Omega(\nu) \equiv \frac{\nu}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{gw}}}{d\nu}, \quad (2.75)$$

gdzie ρ_c jest obecną gęstością krytyczną dla Wszechświata i wynosi

$$\rho_c = 1.05 \cdot 10^{-5} \cdot h_0^2 [\text{GeV}/\text{cm}^3], \quad (2.76)$$

natomiast znormalizowana wartość stałej Hubble'a jest równa $h_0 = 0.7$. Na tej podstawie wyznaczamy

$$\Omega_{\text{gw}}(\nu) = \Omega_0 \cdot \nu^4 \cdot \bar{n} \left[k = \nu \cdot 2\pi a_* \cdot \left(\frac{a_0}{a_*} \right) \right] \quad (2.77)$$

gdzie a_0 odpowiada dzisiejszej wartości czynnika skali natomiast a_* czynnikiowi skali w czasie produkcji grawitonów oraz

$$\Omega_0 = \frac{\hbar c}{c^4} \frac{16\pi^2}{\rho_c} = \frac{16\pi^2 \cdot 197.3 \cdot 10^{-15} [\text{MeV} \cdot \text{m}]}{3^4 \cdot 10^{32} [\text{m}^4/\text{s}^4] 1.05 \cdot 10^{-5} \cdot h_0^2 [\text{GeV}/\text{cm}^3]} = 3.66 \cdot h_0^{-2} \cdot 10^{-49} [\text{Hz}^{-4}]. \quad (2.78)$$

2.3 Produkcja fal grawitacyjnych podczas inflacji

Najważniejszym dotychczasowym zastosowaniem teorii kosmologicznej kreacji fal grawitacyjnych jest faza inflacji. W trakcie jej trwania wszechświat ulega eksponencjalnej ewolucji. Fazę tę najczęściej modeluje się wprowadzając skalarne pole inflatonu. Pole takie może zachowywać się jak fluid o ujemnym ciśnieniu prowadząc do fazy akceleracji.

2.3.1 Widmo mocy dla fazy de Sittera

Najprostszym modelem inflacji nie odwołującym się do natury tego procesu jest tak zwana faza de Sittera. Rozwiązanie tego typu pojawia się dla wszechświata ze stałą kosmologiczną Λ . W takim przypadku rozwiązanie równania Friedmanna ma postać

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (2.79)$$

gdzie $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$. Przechodząc do czasu konforemego τ dostajemy natomiast

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}, \quad (2.80)$$

gdzie ustaliliśmy stałą całkowania równą zeru. Równanie 2.66 przybiera więc postać

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f(k, \tau) + \left[k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right] f(k, \tau) = 0 \quad (2.81)$$

którego rozwiązaniem jest

$$f(k, \tau) = \sqrt{-\tau} \left[C_1 J_{\frac{3}{2}}(-\tau k) + C_2 Y_{\frac{3}{2}}(-\tau k) \right]. \quad (2.82)$$

Rozwiązanie to podlega przypadkowi $\beta = 1$ rozważanemu w Dodatku 7.3. Wyjaśniono tam sposób normalizacji tego rozwiązania z wykorzystaniem warunku Wrońskiego. Dostajemy stamtąd rozwiązanie na mody adwansowane postaci

$$f(k, \tau) = \sqrt{-\tau} \sqrt{\frac{\pi}{4}} H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(-\tau k) \quad (2.83)$$

gdzie $H^{(1)}$ jest funkcją Hankela pierwszego rodzaju. Funkcja ta może być w tym przypadku wyrażona przez funkcje elementarne. Mianowicie wykorzystując

$$J_{\frac{3}{2}}(-\tau k) = \sqrt{\frac{-2\tau k}{\pi}} \left[\frac{\cos(-\tau k)}{\tau k} + \frac{\sin(-\tau k)}{(\tau k)^2} \right], \quad (2.84)$$

$$Y_{\frac{3}{2}}(-\tau k) = \sqrt{\frac{-2\tau k}{\pi}} \left[\frac{\sin(-\tau k)}{\tau k} - \frac{\cos(-\tau k)}{(\tau k)^2} \right], \quad (2.85)$$

oraz definicję

$$H_{\mu}^{(1)}(x) = J_{\mu}(x) + iY_{\mu}(x) \quad (2.86)$$

dostajemy

$$H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(-\tau k) = \sqrt{\frac{-2\tau k}{\pi}} \left[\frac{e^{-i\tau k}}{k\tau} - i \frac{e^{-i\tau k}}{(k\tau)^2} \right]. \quad (2.87)$$

Wstawiając to do wyrażenia (2.83) dostajemy ostatecznie

$$f(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) e^{-i\tau k}. \quad (2.88)$$

Mody te odpowiadają tak zwanej próżni Bunch-Daviesia.

Wykorzystując definicję (2.68) wyznaczamy widmo mocy fluktuacji kwantowych

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{k}{Ha} \right)^2 \right] \quad (2.89)$$

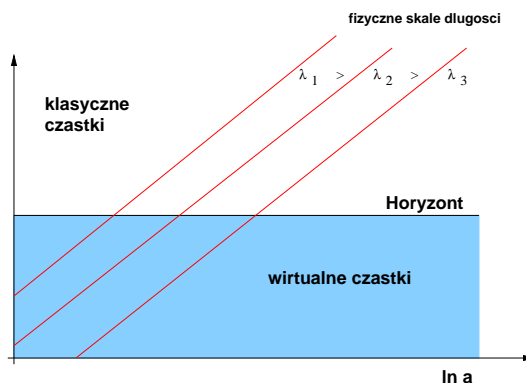
gdzie uwzględniono fakt że $G = 1/m_{\text{Pl}}^2$. Jak wspominaliśmy fluktuacje te stają się klasyczne przecinając horyzont kosmologiczny. Dla rozważanej fazy de Sittera promień horyzontu szybko osiąga stałą wartość

$$R_H \equiv a \int d\tau \simeq \frac{1}{H}. \quad (2.90)$$

Odpowiednie mody k przecinają więc horyzont według relacji

$$k = \frac{2\pi a}{R_H} \simeq aH. \quad (2.91)$$

Proces ten zobrazowano na Rys. 2.3. Wstawiając warunek (2.91) do wyrażenia (2.89)



Rysunek 2.3: Ewolucja horyzontu i modów fluktuacji w modelu inflacyjnym.

dostajemy widmo fal grawitacyjnych na horyzoncie

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{32}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (2.92)$$

2.3.2 Widmo mocy dla slow-roll inflation

Modele inflacyjne najczęściej budowane są w oparciu o dynamikę pola skalarnego nazywanego inflatonem. Równanie ruchu dla jednorodnego pola inflatonu przybiera postać

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.93)$$

Pole to interpretowane w języku cieczy doskonałej posiada gęstość oraz ciśnienie równe

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.94)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.95)$$

Dalej będziemy rozważać model, w którym pole inflatonu jest składnikiem dominującym, równanie Friedmanna przybiera więc postać

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{\text{Pl}}^2} \rho_\phi. \quad (2.96)$$

Rozważmy teraz tak zwany model slow-roll inflation, dla którego spełnione jest

$$\epsilon = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (2.97)$$

$$\eta = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V} \right) \ll 1. \quad (2.98)$$

Ponadto łatwo pokazać, że

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (2.99)$$

co będzie dalej przydatne. Rozważmy całkę na czas konforemny

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dt}{a} = \int \frac{da}{a^2 H} \\ &= -\frac{1}{Ha} - \int \frac{1}{a} \frac{\dot{H}}{H^2} \frac{dt}{da} da \\ &= -\frac{1}{Ha} + \epsilon \int \frac{da}{a^2 H} = -\frac{1}{Ha} + \epsilon \tau \end{aligned} \quad (2.100)$$

gdzie w drugiej linijce wykonaliśmy całkowanie przez części. Stąd

$$a(\tau) = -\frac{1}{(1-\epsilon)H\tau}. \quad (2.101)$$

Widać, że dla $\epsilon = 0$ odzyskujemy ewolucję dla fazy de Sittera. Dostajemy stąd

$$\frac{a''}{a} = \frac{2-\epsilon}{(1-\epsilon)^2} \frac{1}{\tau^2} = \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \quad (2.102)$$

gdzie

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon} = \frac{3}{2} + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.103)$$

Równanie 2.66 przybiera więc postać

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f(k, \tau) + \left[k^2 - \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] f(k, \tau) = 0, \quad (2.104)$$

którego rozwiązaniem jest

$$f(k, \tau) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2k}} \sqrt{-\tau k} H_\nu^{(1)}(-\tau k), \quad (2.105)$$

gdzie

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi(2\nu+1)/4}. \quad (2.106)$$

Wykorzystaliśmy tu normalizację opisaną w Dodatku 7.3.

Wykorzystując definicję (2.68) wyznaczamy widmo mocy fluktuacji kwantowych

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = 8 \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 (1 - \epsilon)^2 (-k\tau)^3 |H_\nu^{(1)}(-k\tau)|^2. \quad (2.107)$$

Ponieważ interesują nas mody niskoenergetyczne odpowiadające skalom horyzontu kosmologicznego będziemy mogli dalej stosować przybliżenie

$$H_\nu^{(1)}(x) \simeq -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu} \quad (2.108)$$

dla $|x| \ll 1$. Stąd

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{2^{6+\epsilon}}{\pi^2} \Gamma^2 \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) (1 - \epsilon)^{2+\epsilon} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}. \quad (2.109)$$

gdzie wykorzystaliśmy $\nu \simeq \frac{3}{2} + \epsilon$. Na skalach horyzontalnych $k \simeq aH$ dając

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{2^{6+\epsilon}}{\pi^2} \Gamma^2 \left(\frac{3}{2} + \epsilon \right) (1 - \epsilon)^{2+\epsilon} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (2.110)$$

Biorąc $\epsilon = 0$ oraz wykorzystując $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ odzyskujemy wyrażenie na widmo mocy dla fazy de Sittera 2.92.

3 Pętlowa kosmologia kwantowa

W poprzednim rozdziale wykorzystaliśmy sformułowanie hamiltonowskie teorii grawitacji w języku zmiennych Ashtekara do wyprowadzenia równań na mody tensorowe. W tym rozdziale wprowadzimy teorię Pętlowej Grawitacji Kwantowej (LQG) bazującą na zmiennych Ashtekara. Następnie rozważymy model kosmologii kwantowej opierający się na LQG i prowadzący do tak zwanej fazy bounce'u. Wyprowadzona semi-klasyczna dynamika posłuży nam w następnym rozdziale jako tło dla kosmologicznej kreacji grawitonów.

3.1 Elementy Pętlowej Grawitacji Kwantowej

Podstawą do sformułowania Pętlowej Grawitacji Kwantowej (Loop Quantum Gravity - LQG) są tak zwane zmienne Ashtekara [13, 14]. W ich języku Ogólna Teoria Względności przybiera postać teorii Yanga-Millsa z grupą $SU(2)$. Formalne wprowadzenie tych zmiennych odbywa się na poziomie hamiltonowskiego sformułowania teorii grawitacji. Sformułowanie to może być też wprowadzone *a priori* bez wcześniejszego odwoływania się do zmiennych geometrycznych jak np. pokazuje Smolin [15]. Postąpmy więc w ten sposób wprowadzając przestrzeń Σ bez zdefiniowanej struktury metrycznej. Na tej przestrzeni rozważmy teorię Yanga-Millsa z wiązką $SU(2)$. Zmienne kanoniczne dla tej teorii będą pole koneksji A wraz z kanonicznie sprzężonym polem E . Oznaczenia te wybrano w odpowiedniości do teorii $U(1)_{em}$ gdzie A jest czteropotencjałem a, E polem elektrycznym. W przypadku rozważanej teorii $SU(2)$ zmienną $A \in \mathfrak{su}(2)$ nazywamy koneksją Ashtekara, a pole $E \in \mathfrak{su}(2)^*$ polem gęstości triadu. Pola te spełniają klasyczny nawias Poissona

$$\{A_a^i(\mathbf{x}), E_j^b(\mathbf{y})\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.1)$$

gdzie stałą γ nazywamy parametrem Barbero-Immirzi a $\kappa = 8\pi G$. Wprowadzono tu konwencję, w której indeksy przestrzenne to a, b, c, \dots natomiast indeksy grupowe to i, j, k, \dots . Kolejnym krokiem będzie wprowadzenie więzów niezmienniczości względem lokalnych dyfeomorfizmów w budowanej teorii koneksji $SU(2)$. Najprostszy będzie

tak zwany więz Gaussa w postaci

$$G_i = D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a \approx 0. \quad (3.2)$$

Więz ten zapewnia niezmienniczość względem obrotów. Kolejnym będzie więz niezmienniczości względem przestrzennych dyfeomorfizmów

$$C_a = E_i^b F_{ab}^i - (1 - \gamma^2) K_a^i G_i \approx 0. \quad (3.3)$$

Ostatnim, a zarazem najważniejszym jest więz dyfeomorfizmów czasowych czyli tak zwany więz skalarny

$$H_G = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} K_{[a}^i K_{b]}^j \approx 0, \quad (3.4)$$

gdzie $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ jest krzywizną koneksji Ashtekara a $\gamma K_a^i = A_a^i - \Gamma_a^i$, gdzie Γ_a^i jest koneksją spinową, która może być wyrażona przez pole E . Mianowicie

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_k e_j^b \left(\partial_{[a} e_{b]}^k + \delta^{kl} \delta_{ms} e_l^c e_a^m \partial_b e_c^s \right), \quad (3.5)$$

gdzie

$$e_a^i = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{abc} E_j^b E_k^c}{\sqrt{|\det(E)|}} \quad \text{oraz} \quad e_i^a = \frac{\text{sgn}(\det(E)) E_i^a}{\sqrt{|\det(E)|}}. \quad (3.6)$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy teorie na poziomie klasycznym. Możemy teraz dokonać interpretacji geometrycznej. Mianowicie definiujemy

$$E_i^a = \sqrt{|\det q|} e_i^a, \quad (3.7)$$

gdzie $q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}$. Stąd jak łatwo pokazać

$$\det(q) q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}. \quad (3.8)$$

Pole E może być więc zinterpretowana w języku pola metrycznego q_{ab} . W ten sposób rozważana teoria Yanga-Millsa zadaje strukturę metryczną na rozmaitości Σ .

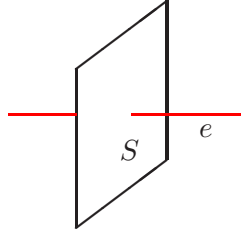
Kwantowanie rozważanej teorii przebiega w sposób odmienny niż w standardowej teorii pól Yanga-Millsa gdzie rozważamy stany w przestrzeni Focka. Niezbędne będzie mianowicie wprowadzenie nowych nielokalnych zmiennych. Pierwszą z nich będzie holonomia

$$h_e[A] = \mathcal{P} \exp \int_e A, \quad (3.9)$$

gdzie e jest krzywą $e \in \Sigma$, drugą natomiast strumień

$$F_S^i[E] = \int_S \star E^i, \quad (3.10)$$

gdzie S jest powierzchnią $S \in \Sigma$. Rozważmy więc krzywą e oraz powierzchnie S zanurzone w przestrzeni Σ . Przypadek kiedy ulegają one przecięciu przedstawiono poniżej.



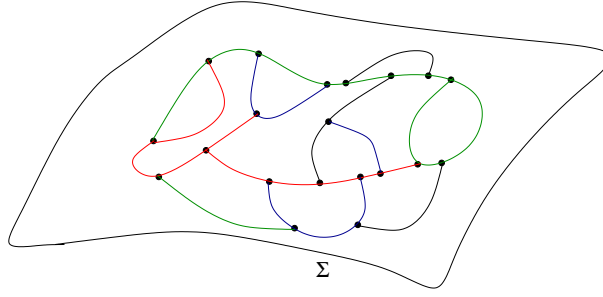
Dla takiej elementarnej konfiguracji możemy wyznaczyć nawias Poissona dla nowo wprowadzonych zmiennych

$$\{h_e[A], F_S^i[E]\} = \frac{\kappa\gamma}{4} \alpha(e, S) \tau^i h_e[A], \quad (3.11)$$

gdzie $\alpha(e, S) = \pm 1$ dla przypadku $S \cap e \neq 0$ oraz $\alpha(e, S) = 0$ w przypadku $S \cap e = 0$. Kinematykę kwantową konstruujemy przemianowując zmienne (h, F) na operatory kwantowe. Zdefiniujemy teraz kinematyczną przestrzeń Hilberta. Mianowicie w LQG funkcja falowa próbkuje geometrię tylko na jednowymiarowej podrozmaitości zwanej siecią spinową

$$\Psi_\Gamma(A) := \psi(h_{e_1}(A), \dots, h_{e_n}(A)) \in \text{Cyl}, \quad (3.12)$$

gdzie $\{e_1, \dots, e_n\}$ to krawędzie sieci spinowej. Funkcje tego typu nazywamy cylindrycznymi. Kinematyczna przestrzeń Hilberta \mathcal{H}_{kin} jest więc przestrzenią sieci spinowych. Sieci te oznaczane jako Γ tworzą grafy o skończonej liczbie linków. Każdy link oznaczony jest indeksem numerującym reprezentację grupy $SU(2)$. Przedstawiono to diagramatycznie na rysunku poniżej. Kolejnym naturalnym krokiem jest zdefiniowanie ilocznu skalarnego oraz wprowadzenie więzów na poziomie kwantowym. Nie będzie to jednak istotne z punktu widzenia rozważań zawartych w tej pracy. Jako zakończenie tego podrozdziału podamy zbiór odpowiednich referencji, w których czytelnik będzie mógł znaleźć dalsze informacje na temat Pętlowej Grawitacji Kwantowej. Zanim jednak do tego przejdziemy przedstawimy jeden z podstawowych wyników w LQG, będący ponadto istotnym z punktu widzenia rozważań prowadzonych w tej pracy. Mianowicie chodzi o kwantowanie operatora powierzchni. Jak widzieliśmy strumienie $F_S^i[E]$ są obiektami związanymi z powierzchnią. Będą one więc pomocne przy zdefiniowaniu



Rysunek 3.1: Przykład sieci spinowej.

opera powierzchni $S \in \Sigma$. Mianowicie definiujemy operator powierzchni

$$\hat{A}_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{A}_S^N \quad (3.13)$$

jako granicę sum Riemmana

$$\hat{A}_S^N = \sum_{I=1}^N \sqrt{\hat{F}_i(S_I) \hat{F}^i(S_I)}, \quad (3.14)$$

co odpowiada rozbięciu powierzchni S na komórki S_I . Można teraz pokazać, że działanie tak zdefiniowanego operatora jest diagonalizowane przez stany sieci spinowej $|\Psi_\Gamma\rangle$. Dostajemy ostatecznie

$$\hat{A}_S |\Psi_\Gamma\rangle = \kappa\gamma \sum_p \sqrt{j_p(j_p + 1)} |\Psi_\Gamma\rangle, \quad (3.15)$$

gdzie p przebiega po krawędziach sieci spinowej Γ przecinających powierzchnie S . Widmo operatora jest więc dyskretne z minimalną wartością własną odpowiadającą $j = 1/2$.

Obszerne omówienie zagadnień z zakresu Pętlowej Grawitacji Kwantowej Czytelnik może znaleźć w książce Carlo Rovelliego [16]. Po bardziej elementarne i szybkie wprowadzenie odsyłamy do pracy Hermanna Nicolai oraz Kaspera Pattersa [17]. Ponadto istnieje szereg obszernych wprowadzeń jak [4, 18–20]. W kontekście kwantowych czarnych dziur odsyłamy do prac [21, 22]. Natomiast odnośnie zastosowań kosmologicznych rekomendujemy [3, 23, 24].

3.2 Pętlowa Kosmologia Kwantowa

Dla płaskiego modelu FRW zmienne Ashtekara możemy sparametryzować przez

$$A_a^i = cV_0^{-1/3} \omega_a^i, \quad (3.16)$$

$$E_i^a = pV_0^{-2/3} e_i^a, \quad (3.17)$$

gdzie $c = \gamma \dot{a}$ oraz $|p| = a^2$. Wprowadzony parametr V_0 jest objętością komórki elementarnej, do której ograniczamy całkowanie. Zabieg taki jest niezbędny w modelach płaskich ze względu na brak zwartości przestrzeni.

Pętlowe kwantowanie wymaga zamiany klasycznych zmiennych przez operatory kwantowe wyrażane przez holonomie i strumienie. W przypadku modeli FRW holonomie redukują się do funkcji prawie periodycznych $\sum_j \xi_j e^{i\mu_j c/2}$, natomiast strumienie do zmiennej p [23]. Funkcje prawie periodyczne są odpowiednikiem funkcji cylindrycznym w pełnej teorii. Następnie, w analogii do pełnej teorii algebra zmiennych p oraz $e^{i\mu c/2}$ jest kwantowana. Kwantowy nawias Poissona dla elementarnych operatorów przybiera postać

$$\left[\hat{p}, e^{\frac{i\mu c}{2}} \right] = \mu \frac{8\pi G \gamma}{6} e^{\frac{i\mu c}{2}}, \quad (3.18)$$

operatory te działają w przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$. Jako bazę tej przestrzeni wybieramy zbiór wartości własnych operatora \hat{p}

$$\hat{p}|\mu\rangle = \mu \frac{8\pi G \gamma l_{\text{Pl}}^2}{6} |\mu\rangle \quad (3.19)$$

spełniających warunek normalizacji $\langle \mu | \mu' \rangle = \delta_{\mu, \mu'}$. Działanie operatora $\hat{N} = e^{\frac{i\mu c}{2}}$ jest następujące

$$e^{\frac{i\mu c}{2}} |\mu'\rangle = |\mu' + \mu\rangle. \quad (3.20)$$

Dany stan Wszechświata $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\text{Bohr}}, d\mu_{\text{Bohr}})$ można przedstawić jako przeliczalną sumę

$$|\Psi\rangle = \sum_n c^{(n)} |\mu_n\rangle \quad (3.21)$$

gdzie $c^{(n)} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n \bar{c}^{(n)} c^{(n)} < \infty. \quad (3.22)$$

Na podstawie powyższych definicji widać, że dla $\Psi(p) := \langle p | \Psi \rangle$ mamy

$$\hat{p}\Psi(p) = p\Psi(p), \quad (3.23)$$

$$\hat{N}_\mu\Psi(p) = \Psi(p + p'). \quad (3.24)$$

Dziedzina operatorów jest natomiast zdefiniowana jako

$$\mathcal{D} = \left\{ |\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} : |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n c^{(i)} |\mu_i\rangle, c^{(i)} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.25)$$

Kolejnym krokiem po zdefiniowaniu struktury kinematycznej teorii jest kwantowanie więzów. Doprowadzi nas to do kwantowej dynamiki modeli kosmologicznych. W modelach tych jedyny wkład do Hamiltonianu daje więź skalarny. Mianowicie więź Gaussa znika tożsamościowo, a więź dyfeomorfizmów przestrzennych nie daje wkładu przez wybór cechowania (układ współporuszający). Hamiltonian przyjmuje więc postać

$$H_G = -\frac{1}{16\pi G} \frac{1}{\gamma^2} \int_{\Sigma} d^3x \epsilon_{ijk} e^{-1} E_i^a E_j^b F_{ab}^k, \quad (3.26)$$

gdzie $e = \sqrt{|\det E|}$. Wykorzystano tu też fakt płaskości przetrzeni co spowodowało uproszczenie więzu skalarnego. Aby przejść do teorii kwantowej musimy wyrazić powyższy Hamiltonian w języku holonomii. Na podstawie definicji możemy policzyć wartość holonomii w kierunku ${}^o e_i^a \partial_a$ na odcinku $\lambda V_0^{1/3}$

$$h_i^{(\lambda)} = \mathbb{I} \cos\left(\frac{\lambda c}{2}\right) + 2\tau_i \sin\left(\frac{\lambda c}{2}\right), \quad (3.27)$$

gdzie $\tau_i = -i\sigma_i/2$ a σ_i są macierzami Pauliego.

Bazując o elementarne holonomie możemy wyrazić tak zwany człon Thiemanna

$$\epsilon_{ijk} e^{-1} E_i^a E_j^b = \sum_k \frac{\epsilon^{abc} \omega_c^k}{2\pi G \gamma \lambda} \text{tr}(h_k^{(\lambda)} \{h_k^{(\lambda)-1}, V\} \tau_i). \quad (3.28)$$

Wyraz ten wprowadza efekty kwantowe zależne od wyboru V_0 . Ich stosowanie w modelach płaskich staje się więc nieadekwatne. Nie mogą one być one jednak zaniedbane w modelach z krzywizną. Ponieważ ograniczamy nasze rozważania do modeli płaskich, nie będziemy dalej rozważać efektów kwantowych pochodzących od tego członu.

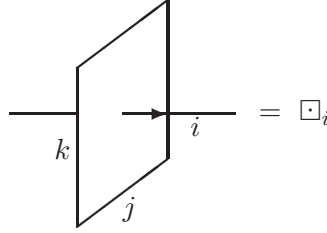
Krzywą koneksji Ashtekara wyrażamy jako granicę

$$F_{ab}^k = -2 \lim_{Ar \rightarrow 0} \frac{\text{tr} \left[\tau_k \left(h_{\square_{ij}}^{(\mu)} - \mathbb{I} \right) \right]}{\mu^2 V_0^{2/3}} {}^o\omega_a^i {}^o\omega_b^j. \quad (3.29)$$

Ślad w tym równaniu może być bezpośrednio wyliczony wykorzystując (3.27) dając

$$\text{tr} \left[\tau_k \left(h_{\square_{ij}}^{(\mu)} - \mathbb{I} \right) \right] = -\frac{\epsilon_{kij}}{2} \sin^2(\mu c). \quad (3.30)$$

Jednakże w LQG granica $Ar \rightarrow 0$ w równaniu (3.29) nie istnieje. Wynika to z faktu istnienia minimalnego, niezerowego kwantu powierzchni $\Delta = 2\sqrt{3}\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2$ [25, 26]. Wykonywanie granicy w równaniu (3.29) powinniśmy więc przerwać na minimalnej powierzchni Δ przecinanej przez pętlę. Dla holonomii w kierunku ${}^o e_i^a \partial_a$ jest to powierzchnia \square_i , co przedstawiono na diagramie poniżej (gdzie $i = k \wedge j$).



Powierzchnia $Ar = \square_i$ powinna dla $Ar \rightarrow \Delta$ wiązać się z graniczną wartością długości krawędzi pętli $\mu = \bar{\mu}$. Musimy więc powiązać \square_i z μ . Możemy wybrać, aby \square_i odpowiadało fizycznej powierzchni powierzchni $a^2 \mu^2$ lub powierzchni współrzędnościowej μ^2 . W przypadku $\square_i = V_0^{2/3} a^2 \mu^2 = |p| \mu^2$ otrzymujemy w granicy

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{|p|}}. \quad (3.31)$$

To podejście nazywamy schematem $\bar{\mu}$. W drugim przypadku kiedy $\square_i = |p_0| \mu^2$, gdzie p_0 odpowiada wartości własnej

$$\hat{p} |\mu_0\rangle = \mu_0 \frac{8\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{6} |\mu_0\rangle, \quad (3.32)$$

otrzymujemy w granicy

$$\bar{\mu} = \mu_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.33)$$

Podejście to nazywamy schematem μ_0 . Prowadzi ono jednak do niepoprawnej granicy klasycznej. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku schematu $\bar{\mu}$. W

ogólności możemy jednak sparametryzować

$$\bar{\mu}(p) = \xi|p|^n, \quad (3.34)$$

gdzie $n \in [-1/2, 0]$ oraz $\xi \in \mathbb{R}_+$. Przedział zmienności paramateru n uzyskujemy z rozważań tak zwanych stanów sieciowych [27]. Rozważmy mianowicie obszar V_0 zawierający sieć o średniej długości krawędzi wynoszącej l_0 . Liczba bloków sieciowych jest więc równa $\mathcal{N} = V_0/l_0^3$. Ta wielkość odpowiada wcześniej wprowadzonemu $\bar{\mu}$ poprzez relacje $\mathcal{N} = \bar{\mu}^{-3}(p)$. Podczas ewolucji wzrost objętości przestrzeni wynika ze wzrostu indeksów spinowych na krawędziach oraz z kreacji nowych vertexów. Jeśli dominuje ten pierwszy efekt to liczba bloków pozostaje stała podczas ewolucji, $\mathcal{N} = \text{const}$. W przeciwnym wypadku, kiedy indeksy spinowe nie ulegają zmianie, liczba vertexów skaluje się z objętością, czyli $\mathcal{N} \propto |p|^{3/2}$. Ewolucja fizyczna odpowiada stanowi pośredniemu. Wykorzystując definicje \mathcal{N} uzyskujemy dopuszczalny przedział zmienności $n \in [-1/2, 0]$. Inny typ niejednoznaczności badany jest w pracach [28, 29].

3.3 Fenomenologia bounce'u

Uwzględniając dyskretność przestrzeni i wstawiając wynik (3.30) do granicy (3.29) dostajemy

$$F_{ab}^k = \frac{\sin^2(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}^2 V_0^{2/3}} \epsilon_{kij} {}^o\omega_a^i {}^o\omega_b^j. \quad (3.35)$$

W przypadku klasycznym mielibyśmy natomiast

$$F_{ab}^k = \frac{c^2}{V_0^{2/3}} \epsilon_{kij} {}^o\omega_a^i {}^o\omega_b^j. \quad (3.36)$$

Na podstawie powyższych dwóch równań widzimy, że efekty kwantowe mogą być wprowadzone przez zamianę

$$c \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \quad (3.37)$$

w wyrażeniach klasycznych. Fenomenologiczny Hamiltonian uwzględniający poprawki od holonomii kwantowych przyjmuje więc postać

$$H_{\text{eff}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \sqrt{|p|} \left[\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right]^2 + \frac{\pi_\phi^2}{2|p|^{3/2}} + |p|^{3/2} V(\phi), \quad (3.38)$$

gdzie uwzględniliśmy też wkład od jednorodnego pola skalarnego. Korzystając z więzy hamiltonowskiego $H_{\text{eff}} = 0$ oraz z równania Hamiltona

$$\dot{p} = \{p, H_{\text{eff}}\} = \frac{2\sqrt{|p|}}{\gamma\bar{\mu}} \sin(\bar{\mu}c) \cos(\bar{\mu}c) \quad (3.39)$$

wyprowadzamy efektywne równanie Friedmanna

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{p}}{2p}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi \left(1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_c}\right), \quad (3.40)$$

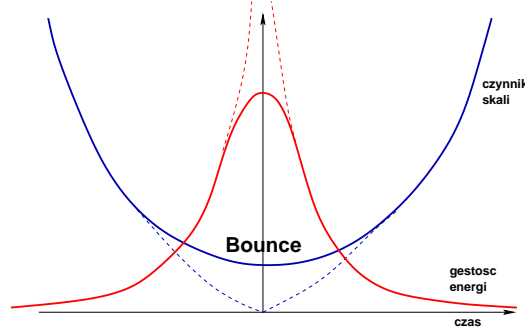
gdzie

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 l_{\text{Pl}}^4}. \quad (3.41)$$

oraz

$$\rho_\phi = \frac{\pi\phi^2}{2|p|^3} + V(\phi). \quad (3.42)$$

Równanie (3.40) prowadzi do nieosobliwej ewolucji kosmologicznej. Typowym jego rozwiązaniem jest tak zwany bounce, który minimum czynnika skali osiąga dla maksymalnej gęstości energii ρ_c . Przedstawiono to na schematynie na Rys. 3.2.



Rysunek 3.2: Schemat ewolucji czynnika skali i gęstości energii podczas fazy bounce'u. Przerywana linia odpowiada trajektoriom klasycznym.

W dalszej części pracy będziemy się koncentrować na modelu bez potencjału. W takim przypadku rozwiązaniem zmodyfikowanego równania Friedmanna(3.40) jest

$$|p(t)| = \left(\frac{1}{6}\kappa\pi_\phi^2\gamma^2\Delta + \frac{3}{2}\kappa\pi_\phi^2t^2\right)^{1/3}. \quad (3.43)$$

Rozszerzenie tego modelu z uwzględnieniem potencjału badane jest numerycznie w pracy [30]. Efekty stałej kosmologicznej badane są natomiast w [31], gdzie znaleziono

jawne analityczne rozwiązania modelu.

4 Produkcja fal grawitacyjnych w kosmologii pętlowej

4.1 Uwagi o wczesnych próbach wyznaczania widma fal grawitacyjnych w LQC

Możliwość występowania silnej produkcji fal grawitacyjnych w LQC została zaproponowana przez Autora oraz M. Szydłowskiego w pracy [7]. W pracy tej wyliczono widmo fal grawitacyjnych produkowanych podczas fazy super-inflacji przewidywanej przez LQC. Obliczenia przeprowadzono w modelu płaskim uwzględniając efekty kwantowe w dynamice tła. Poprawki kwantowograwitacyjne pochodziły od operatora odwrotnej objętości. Taki sposób wprowadzania efektów kwantowych był w początkowej fazie rozwoju LQC szeroko badany i stosowany. Jednakże obecne zrozumienie LQC wskazuje na trudności związane z istnieniem poprawek od odwrotnej objętości w modelach płaskich. Wiąże się to z koniecznością ustalania rozmiaru komórki elementarnej, a tym samym skali energii w modelach płaskich. Problem ten nie pojawia się w modelach FRW $k = 1, -1$, gdzie skale energii są wyznaczone przez krzywiznę.

4.2 Produkcja fal grawitacyjnych podczas Big Bounce'u - Toy model

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy w jaki sposób efekty kwantowej grawitacji prowadzą do unikania początkowej osobliwości wprowadzając bounce. Na poziomie fenomenologicznym wynika to z istnienia modyfikacji równania Friedmanna, które w przypadku płaskiego modelu FRW, przyjmuje postać

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (4.1)$$

W tym podrozdziale rozwiążemy pewien szczególny model opisujący produkcję fal grawitacyjnych podczas fazy Big Bounce'u. Szczegółowość ta wynika z wybrania specyficznej formy materii wypełniającej wszechświat. Będziemy się także opierać na

klasycznym równaniu na mody tensorowe. Jak jednak zobaczymy w dalszej części pracy nie jest to w pełni poprawne. Mianowicie efekty kwantowej grawitacji prowadzą także do modyfikacji równania modów. Temu zagadnieniu poświęcimy uwagę w dalszej części niniejszej pracy. W tym podrozdziale poprawki te zaniebamy. Pozwoli to jednak na opisanie produkcji grawitonów w sposób czysto analityczny. Taki jawnie rozwiązany model będzie stanowił dla nas punkt odniesienia przy dalszych rozważaniach, gdzie ściśle wyniki analityczne będą już niedostępne.

4.2.1 Dynamika tła

Materia, która odpowiada za dynamikę tła w rozważanym modelu skaluje się jak

$$\rho = \frac{\rho_c}{a^2}. \quad (4.2)$$

Dla porównania materia pyłowa skaluje się jak $1/a^3$, promieniowanie jak $1/a^4$, natomiast swobodne pole skalarne jak $1/a^6$. Wstawiając wyrażenie (4.2) do równania (4.1), a następnie rozwiązując je dostajemy

$$a(t) = \sqrt{1 + (t/t_0)^2}, \quad (4.3)$$

gdzie

$$t_0^2 = \frac{3}{8\pi G\rho_c}. \quad (4.4)$$

Przechodząc do czasu konforemnego $d\tau = dt/a$ dostajemy

$$a(\tau) = \cosh(\tau/t_0). \quad (4.5)$$

4.2.2 Funkcje modów

W rozważanym modelu będziemy się opierać na klasycznym równaniu propagacji

$$h_i'' + 2\frac{a'}{a}h_i' + k^2h_i = 0 \quad (4.6)$$

gdzie $i = \oplus, \otimes$. Wprowadzając zmienną

$$u = \frac{ah_{\oplus}}{\sqrt{16\pi G}} = \frac{ah_{\otimes}}{\sqrt{16\pi G}} \quad (4.7)$$

dostajemy rozważane już wcześniej działanie

$$S_t = \frac{1}{2} \int d\tau d^3\mathbf{x} [u'^2 - \delta^{ij} \partial_i u \partial_j u - m_{\text{eff}}^2 u^2], \quad (4.8)$$

gdzie

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{a''}{a}. \quad (4.9)$$

Zmienną kanoniczną do zmiennej u dostajemy przez wariację

$$\pi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\delta S_t}{\delta u'} = u'. \quad (4.10)$$

Przechodząc do teorii kwantowej rozkładamy operatory pola na mody fourierowskie w postaci

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (4.11)$$

$$\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \left[\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (4.12)$$

Składowe Fouriera wyrażone są natomiast przez operatory kreacji i anihilacji

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) = \hat{a}_{\mathbf{k}} f(k, \tau) + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger f^*(k, \tau), \quad (4.13)$$

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}}(\tau) = \hat{a}_{\mathbf{k}} g(k, \tau) + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger g^*(k, \tau), \quad (4.14)$$

gdzie $f(k, \tau)' = g(k, \tau)$. Równanie na funkcje modów przybiera postać

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f(k, \tau) + [k^2 + m_{\text{eff}}^2] f(k, \tau) = 0, \quad (4.15)$$

gdzie

$$m_{\text{eff}}^2 = -\frac{a''}{a} = -\frac{1}{t_0^2} = -k_0^2. \quad (4.16)$$

Korzystając z definicji

$$t_0^2 = \frac{3}{8\pi G \rho_c} \quad \text{i} \quad \rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2 \gamma^2 l_{\text{Pl}}^4}. \quad (4.17)$$

oraz przyjmując $\gamma = \gamma_M = 0.12738$ [32] dostajemy

$$k_0 \simeq \frac{2.38}{l_{\text{Pl}}}. \quad (4.18)$$

Znajdźmy teraz rozwiązania równania (4.15). Będziemy oddzielnie rozważać dwa

przypadki $k^2 > k_0^2$ oraz $k^2 < k_0^2$.

- Przypadek z $k^2 > k_0^2$

Rozwiązanie równania (4.15) przyjmuje w tym reżimie postać

$$f(k, \tau) = Ae^{-i\Omega\tau} + Be^{i\Omega\tau}, \quad (4.19)$$

gdzie $A, B \in \mathbb{C}$ oraz

$$\Omega = \sqrt{k^2 - k_0^2}. \quad (4.20)$$

Wykorzystując warunek Wronskiego dostajemy następnie więz

$$|A|^2 - |B|^2 = \frac{1}{2\Omega}. \quad (4.21)$$

Dalej wybieramy rozwiązania adwansowane, biorąc

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \quad \text{oraz} \quad B = 0, \quad (4.22)$$

co ostatecznie daje

$$f(k, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} e^{-i\Omega\tau}, \quad (4.23)$$

$$g(k, \tau) = f'(k, \tau) = -i\sqrt{\frac{\Omega}{2}} e^{-i\Omega\tau}. \quad (4.24)$$

Jak łatwo zobaczyć, dla otrzymanych modów odzyskiwana jest poprawna granica wysokoenergetyczna.

- Przypadek z $k^2 < k_0^2$

Rozwiązanie równania (4.15) przyjmuje w tym reżimie postać

$$f(k, \tau) = Ae^{-\bar{\Omega}\tau} + Be^{\bar{\Omega}\tau}, \quad (4.25)$$

gdzie $A, B \in \mathbb{C}$ oraz

$$\bar{\Omega} = \sqrt{k_0^2 - k^2}. \quad (4.26)$$

Na podstawie Wronskianu dostajemy

$$BA^* - AB^* = -\frac{i}{2\bar{\Omega}} \quad (4.27)$$

co jest spełnione przez

$$A = \frac{i}{2\sqrt{\Omega}} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{1}{2\sqrt{\Omega}}. \quad (4.28)$$

Stąd rozwiązania na funkcje modów przyjmują postać

$$f(k, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Omega}} \left[e^{\bar{\Omega}\tau} + ie^{-\bar{\Omega}\tau} \right], \quad (4.29)$$

$$g(k, \tau) = f'(k, \tau) = \frac{\sqrt{\Omega}}{2} \left[e^{\bar{\Omega}\tau} - ie^{-\bar{\Omega}\tau} \right]. \quad (4.30)$$

4.2.3 Funkcja korelacji i widmo mocy

Funkcje korelacji dla fal grawitacyjnych wyrażamy jako

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{h}_b^a(\vec{x}, \tau) \hat{h}_a^b(\vec{y}, \tau) | 0 \rangle &= 4 \frac{16\pi G}{a^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f(k, \tau)|^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_T(k, \tau) \frac{\sin kr}{kr}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

gdzie widmo mocy definiuje się jako

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{64\pi G}{a^2} \frac{k^3}{2\pi^2} |f(k, \tau)|^2. \quad (4.32)$$

Rozważmy teraz postać tego widma dla uzyskanych rozwiązań. Tak jak poprzednio będziemy oddzielnie rozważać przypadki $k^2 > k_0^2$ oraz $k^2 < k_0^2$.

- Przypadek z $k^2 > k_0^2$

Wstawiając funkcje (4.23) do definicji (4.32) dostajemy

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{16Gk_0^2}{\pi a^2(\tau)} \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 - (k/k_0)^2}}. \quad (4.33)$$

- Przypadek z $k^2 < k_0^2$

Wstawiając funkcje (4.29) do definicji (4.32) dostajemy

$$\mathcal{P}_T(k, \tau) = \frac{16Gk_0^2}{\pi a^2(\tau)} \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \frac{\cosh\left(2k_0\tau\sqrt{1 - (k/k_0)^2}\right)}{\sqrt{1 - (k/k_0)^2}}. \quad (4.34)$$

Musimy teraz rozważyć ewolucję horyzontu kosmologicznego, aby określić kiedy jest on przecinany przez mody o danej długości λ . Pozwoli to nam określić widmo mocy

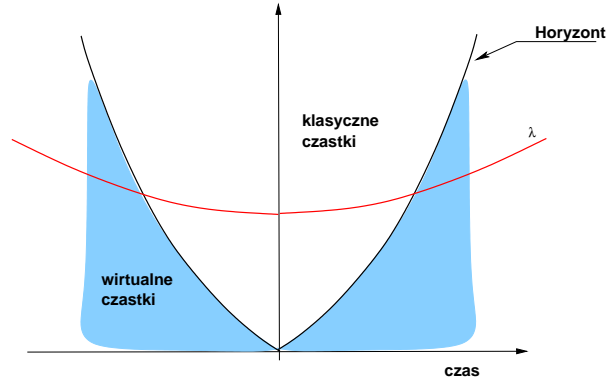
na horyzoncie. Widmo to pozostaje niezmienione na skalach super-horyzontalnych i będzie odpowiadać widmie grawitonów po powtórny przecięciu horyzontu. Na podstawie definicji dostajemy

$$ds^2 = 0 \rightarrow R_H = \pm a(\tau) \int_0^\tau d\tau' = \pm a(\tau)\tau \quad (4.35)$$

gdzie $+$ \rightarrow *ekspansja* oraz $-$ \rightarrow *kontrakcja*. Jawne rozwiązanie na ewolucję horyzontu przybiera postać

$$R_H = \pm a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \pm t_0 \sqrt{1 + (t/t_0)^2} \operatorname{arcsinh}(t/t_0). \quad (4.36)$$

Ewolucję horyzontu dla fazy rozważanej fazy bounce'u wraz z ewolucją modu o długości λ przedstawiono schematycznie na Rys. 4.1.



Rysunek 4.1: Ewolucje horyzontu wraz z ewolucją przykładowego modu o długości λ dla rozważanej fazy bounce'u

Podczas fazy kontrakcji wszystkie skale długości, w kierunku od największych do najmniejszych, wchodzą nad horyzont. Dany mod przecina horyzont gdy spełnione jest $\lambda \simeq R_H$. Odpowiada to warunkowi

$$k = \frac{2\pi a}{R_H} = \frac{2\pi a}{\pm \tau a} = \frac{2\pi}{\pm \tau}. \quad (4.37)$$

Dostaliśmy więc jednoznaczne przyporządkowanie liczby falowej k do czasu konformnego τ na przecięciu z horyzontem. Pozwoli to nam określić widmo mocy fal grawitacyjnych $\mathcal{P}_T(k)$.

- Przypadek z $k^2 > k_0^2$

Wstawiając warunek (4.37) do (4.33) dostajemy

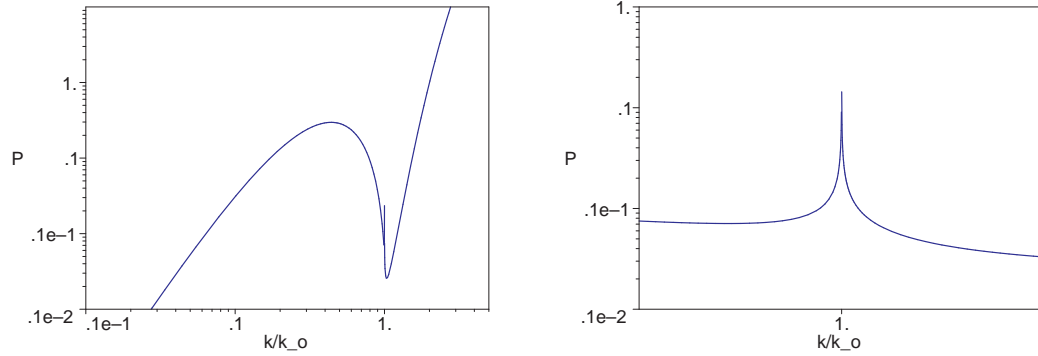
$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{k_0}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{(k/k_0)^2 - 1} \text{ch}^2 \left(\frac{2\pi}{k/k_0} \right)}. \quad (4.38)$$

- Przypadek z $k^2 < k_0^2$

Wstawiając warunek (4.37) do (4.34) dostajemy

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{k_0}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^3 \frac{\text{ch} \left[4\pi \sqrt{(k_0/k)^2 - 1} \right]}{\sqrt{1 - (k/k_0)^2} \text{ch}^2 \left(\frac{2\pi}{k/k_0} \right)}. \quad (4.39)$$

Otrzymane widmo przedstawiono na Rys. 4.2. Jak widać widmo mocy maleje do



Rysunek 4.2: **Lewa** : Widmo mocy fal grawitacyjnych. **Prawa** : Rozbieżność w widmie mocy dla $k/k_0 = 1$.

zera w granicy $k \rightarrow 0$. W granicy wysokoenergetycznej jest ono natomiast rozbieżne. Obszar $k/k_0 > 1$ odpowiada jednak skalom energii Plancka. W tym obszarze stosowane podejście przestaje być więc adekwatne. Dyskretność przestrzeni musi zostać uwzględniona aby uzyskać fizyczne wyniki w tym reżimie. Jak widać na Rys. 4.2 w otrzymanym widmie pojawia się także rozbieżność dla $k/k_0 \rightarrow 1$. Osobliwość ta nie prowadzi jednak do fizycznej rozbieżności funkcji korelacji.

4.2.4 Liczba i gęstość energii grawitonów

Jak już wcześniej wspomiano liczba produkowanych grawitonów dana jest przez

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \langle 0_{\text{in}} | \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}} \right] | 0_{\text{in}} \rangle = |B_-(k)|^2. \quad (4.40)$$

Stąd możemy także wyznaczyć gęstość energii grawitonów

$$\rho_{\text{gw}} = 2 \cdot \hbar\omega \cdot \frac{d^3k}{(2\pi c)^3} \cdot \bar{n}_{\mathbf{k}}, \quad (4.41)$$

która jest podstawą do definicji parametru

$$\Omega_{\text{gw}}(\nu) \equiv \frac{\nu}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{gw}}}{d\nu}. \quad (4.42)$$

Wyznamy teraz wartość tego parametru dla grawitonów produkowanych podczas fazy bounce'u.

- Przypadek z $k^2 > k_0^2$

$$\Omega_{\text{gw}}(\nu) = 0. \quad (4.43)$$

- Przypadek z $k^2 < k_0^2$

$$\Omega_{\text{gw}}(\nu) = \Omega_0 \cdot \nu^4 \cdot \sinh^2 \left[\sqrt{1 - \left(2\pi \frac{\nu}{k_0} \frac{a_0}{a_f} \right)^2} (\tau_i - \tau_f) k_0 \right], \quad (4.44)$$

gdzie

$$\Omega_0 = \frac{\hbar c}{c^4} \frac{16\pi^2}{\rho_c} = 3.66 \cdot h_0^{-2} \cdot 10^{-49} [\text{Hz}^{-4}]. \quad (4.45)$$

Jak widać nie ma produkcji grawitonów dla $k^2 > k_0^2$.

Aby wyznaczyć dzisiejsze widmo fal grawitacyjnych musimy znać wzrost czynnika skali $\frac{a_0}{a_f}$. Możemy go wyrazić jako

$$\frac{a_0}{a_f} = \frac{a_0}{a_{\text{rec}}} \frac{a_{\text{rec}}}{a_{\text{rh}}} \frac{a_{\text{rh}}}{a_{\text{i-end}}} \frac{a_{\text{i-end}}}{a_{\text{i-start}}} \frac{a_{\text{i-start}}}{a_f}, \quad (4.46)$$

gdzie

- a_{rec} → era rekombinacji, $z_{\text{rec}} \simeq 1070$, $T_{\text{rec}} \simeq 3 \cdot 10^3 \text{ K}$, $= 0.2 \text{ eV}$
- a_{rh} → faza reheatingu, $T_{\text{rh}} = T_{\text{GUT}} \simeq 10^{14} \text{ GeV}$,
- $a_{\text{i-end}}$ → koniec inflacji,
- $a_{\text{i-start}}$ → początek inflacji.

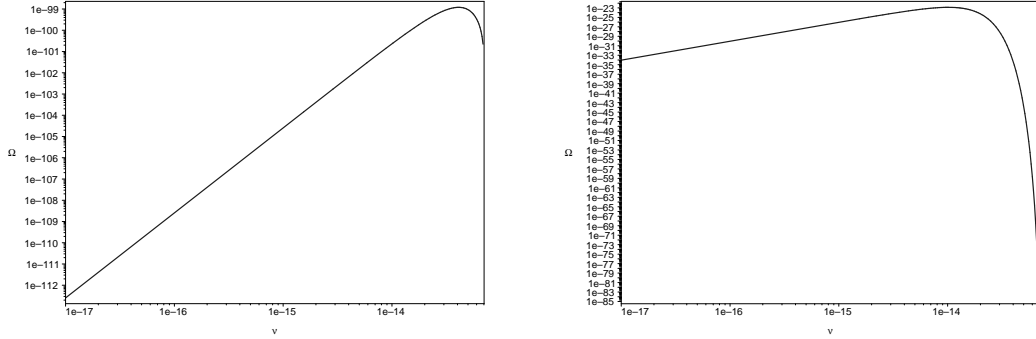
Możemy założyć tak zwany gwałtowny reheating, wtedy ($a_{\text{rh}} \simeq a_{\text{i-end}}$) oraz standardową wartość $N \equiv \ln(a_{\text{i-end}}/a_{\text{i-start}}) = 63$. Wtedy wzrost czynnika skali równy jest

$$\frac{a_{\text{today}}}{a_{\text{f}}} \simeq (1 + z_{\text{dec}}) \cdot \frac{T_{\text{GUT}}}{T_{\text{dec}}} \cdot e^N \cdot \frac{a_{\text{i-start}}}{a_{\text{f}}} \simeq 10^{56}. \quad (4.47)$$

Przyjeliśmy ponadto $a_{\text{i-start}}/a_{\text{f}} \simeq 10^2$. Dalej rozważymy, tak jak powyżej model z fazą inflacji oraz model bez inflacji.

- Model z inflacją

W tym przypadku, jak powyżej wyliczono, dostajemy $\frac{a_0}{a_{\text{f}}} \simeq 10^{56}$ skąd wyznaczamy maksymalną dzisiejszą częstość fal grawitacyjnych $\nu_{\text{max}} \simeq 7 \cdot 10^{-14}$ [Hz]. Otrzymane wartości funkcji $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla różnych czasów trwania fazy bounce'u przedstawiono na Rys. 4.3 oraz Rys. 4.4.



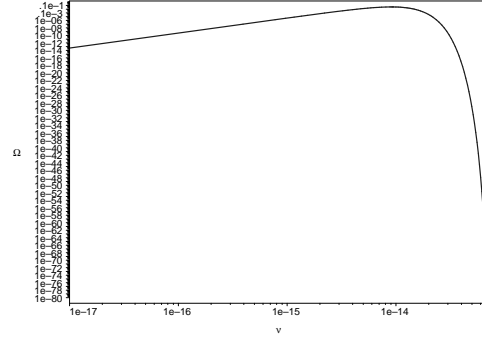
Rysunek 4.3: **Lewa** : Funkcja $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla modelu z inflacją oraz $\tau_i = -1$ [l_{Pl}] i $\tau_f = 1$ [l_{Pl}]. **Prawa** : Funkcja $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla modelu z inflacją oraz $\tau_i = -20$ [l_{Pl}] i $\tau_f = 20$ [l_{Pl}].

- Model bez inflacji

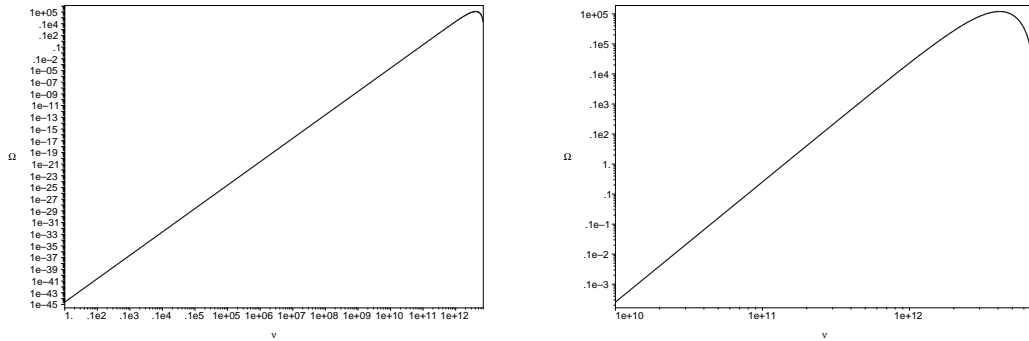
Dla modelu bez fazy inflacji mamy $\frac{a_0}{a_{\text{f}}} \simeq 10^{30}$, co znacznie podwyższa wartość maksymalnej częstości grawitonów $\nu_{\text{max}} \simeq 7 \cdot 10^{12}$ [Hz]. Na Rys. 4.5 przedstawiono wykres funkcji $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla tego modelu.

4.3 Widmo mocy z fazy pre-Bounce'u

W poniższym rozdziale wyliczymy widmo fal grawitacyjnych produkowanych w klasycznej fazie przed kwantowym Bouncem. Rozważymy model ze swobodnym polem



Rysunek 4.4: Funkcja $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla modelu z inflacją oraz $\tau_i = -25 [l_{\text{Pl}}]$ i $\tau_f = 25 [l_{\text{Pl}}]$



Rysunek 4.5: **Lewa** : Funkcja $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla modelu bez inflacji oraz $\tau_i = -1 [l_{\text{Pl}}]$ i $\tau_f = 1 [l_{\text{Pl}}]$. **Prawa** : Funkcja $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ dla modelu bez inflacji oraz $\tau_i = -1 [l_{\text{Pl}}]$ and $\tau_f = 1 [l_{\text{Pl}}]$.

skalarnym rozważanym w kontekście Pętlowej Kosmologii Kwantowej. W tym przypadku czynnik skali ewoluuje jak

$$a(t) = \left(\frac{1}{6} \kappa \pi_\phi^2 \gamma^2 \Delta + \frac{3}{2} \kappa \pi_\phi^2 t^2 \right)^{1/6}, \quad (4.48)$$

co w granicy $t \rightarrow \pm\infty$ daje

$$a(t) \propto |t|^{1/3} \propto |\tau|^{1/2}. \quad (4.49)$$

Stąd

$$\frac{a''}{a} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\tau^2}. \quad (4.50)$$

Równanie 2.66 przybiera więc postać

$$\frac{d^2}{d\tau^2}f(k, \tau) + \left[k^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{\tau^2} \right] f(k, \tau) = 0, \quad (4.51)$$

którego rozwiązaniem jest

$$f(k, \tau) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2k}} \sqrt{-\tau k} H_0^{(1)}(-\tau k), \quad (4.52)$$

gdzie

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi/4}. \quad (4.53)$$

Wykorzystaliśmy tu normalizację opisaną w Dodatku 7.3. Wykorzystując definicję (2.68) wyznaczamy widmo mocy

$$\mathcal{P}_T(k) = \sqrt{\frac{12}{\pi}} |H_0^{(1)}(2\pi)|^2 \left(\frac{k}{k_*} \right)^3 \quad (4.54)$$

fal grawitacyjnych na horyzoncie. Ważną własnością otrzymanego widma jest zachowanie $\mathcal{P}_T(k) \rightarrow 0$ dla $k \rightarrow 0$.

4.4 Poprawki kwantowe od holonomii

W poniższym podrozdziale przejdziemy do wprowadzenia poprawek kwantowych do równania na mody tensorowe. Koncentrować będziemy się tu na poprawkach od holonomii. Hamiltonian uwzględniający efekty holonomii kwantowych przybiera postać [9]

$$\begin{aligned} H_G^{\text{phen}} = & \frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma} d^3x \bar{N} \left[-6\bar{k} \left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 - \frac{1}{2\bar{p}^{3/2}} \left(\frac{\sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{\bar{\mu}\gamma} \right)^2 (\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j) \right. \\ & \left. + \sqrt{\bar{p}} (\delta K_c^j \delta_d^k \delta_c^c \delta_j^d) - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}} \left(\frac{\sin 2\bar{\mu}\gamma\bar{k}}{2\bar{\mu}\gamma} \right) (\delta E_j^c \delta K_c^j) + \frac{1}{\bar{p}^{3/2}} (\delta_{cd} \delta^{jk} \delta^{ef} \partial_e E_j^c \partial_f E_k^d) \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Przy wprowadzaniu efektów holonomii uwzględniono także kasowanie się anomalii. Prowadzi to do pojawienia się czynnika 2 w czwartym wyrazie Hamiltonianu 4.55. Stąd na podstawie równań Hamiltona dostajemy równanie

$$h_i'' + 2 \left(\frac{2 \sin \bar{\mu}\gamma\bar{k}}{2\bar{\mu}\gamma} \right) h_i' + k^2 h_i + T_Q h_i = 0, \quad (4.56)$$

gdzie

$$T_Q = -2 \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{p}} \right) \bar{\mu}^2 \gamma^2 \left[\frac{\sin(\bar{\mu} \gamma \bar{k})}{\bar{\mu} \gamma} \right]^4. \quad (4.57)$$

Wyraz T_Q działa jak zależna od czasu efektywna masa grawitonu. Ponadto z równania ruchu

$$\bar{p}' = 2\bar{N} \sqrt{\bar{p}} \left(\frac{\sin \bar{\mu} \bar{k} \gamma}{\bar{\mu} \bar{k} \gamma} \right) \quad (4.58)$$

dostajemy

$$\left(\frac{\sin \bar{\mu} \bar{k} \gamma}{\bar{\mu} \bar{k} \gamma} \right) = \frac{a'}{a}. \quad (4.59)$$

Drugi wyraz w równaniu (4.56) zachowuje więc klasyczną postać. Jedyna poprawka od holonomii do tego równania dana jest więc przez czynnik T_Q .

Wprowadzając wcześniej zdefiniowaną zmienną u możemy równanie (4.56) zapisać w postaci

$$u'' + [k^2 + m_{\text{eff}}^2] u = 0, \quad (4.60)$$

gdzie

$$m_{\text{eff}}^2 = T_Q - \frac{a''}{a}. \quad (4.61)$$

4.4.1 Efekty poprawki T_Q

Rozważmy wcześniej uzyskane rozwiązanie dla fazy bounce'u

$$\bar{p} = (A + Bt^2)^{1/3}, \quad (4.62)$$

gdzie

$$A = \frac{1}{6} \kappa \pi_\phi^2 \gamma^2 \Delta \quad \text{oraz} \quad B = \frac{3}{2} \kappa \pi_\phi^2. \quad (4.63)$$

Ponadto bierzemy

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{\bar{p}}}. \quad (4.64)$$

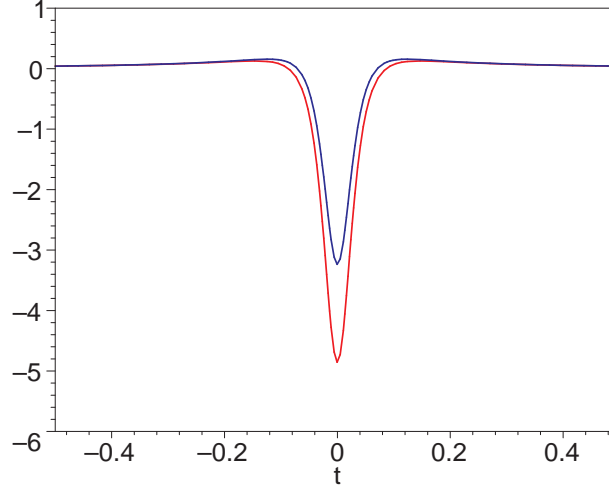
Stąd na podstawie definicji (4.61) wyznaczamy

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{\kappa^2 \pi_\phi^4}{4} \frac{(t^2 - \frac{2}{9} \gamma^2 \Delta)}{(A + Bt^2)^{5/3}}. \quad (4.65)$$

W przypadku $T_Q = 0$ dostajemy natomiast

$$m_{\text{eff}}^2(T_Q = 0) = \frac{\kappa^2 \pi_\phi^4}{4} \frac{(t^2 - \frac{1}{3}\gamma^2 \Delta)}{(A + Bt^2)^{5/3}}. \quad (4.66)$$

Obie te funkcje porównujemy na Rys. 4.6.



Rysunek 4.6: Górna (niebieska) linia przedstawia ewolucję czasową m_{eff}^2 . Dolna (czerwona) linia przedstawia ewolucję czasową $m_{\text{eff}}^2(T_Q = 0)$.

Jak widać poprawka T_Q nie wprowadza jakościowych zmian do równania modów. Podwyższa ona jednak wartość efektywnej masy m_{eff}^2 dla pola u . Fizycznym tego efektem jest tłumienie produkcji grawitonów podczas bounce'u.

4.4.2 Wstępne rozważania numeryczne

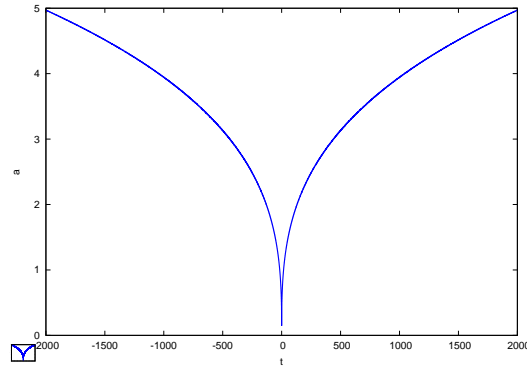
Równania ruchu na ewolucję pola u podczas fazy bounce'u (4.62) możemy zapisać w postaci

$$\frac{du}{d\tau} = \pi_u, \quad (4.67)$$

$$\frac{d\pi_u}{d\tau} = - \left[k^2 + \frac{\kappa^2 \pi_\phi^4}{4} \frac{(t^2 - \frac{2}{9}\gamma^2 \Delta)}{(A + Bt^2)^{5/3}} \right] u, \quad (4.68)$$

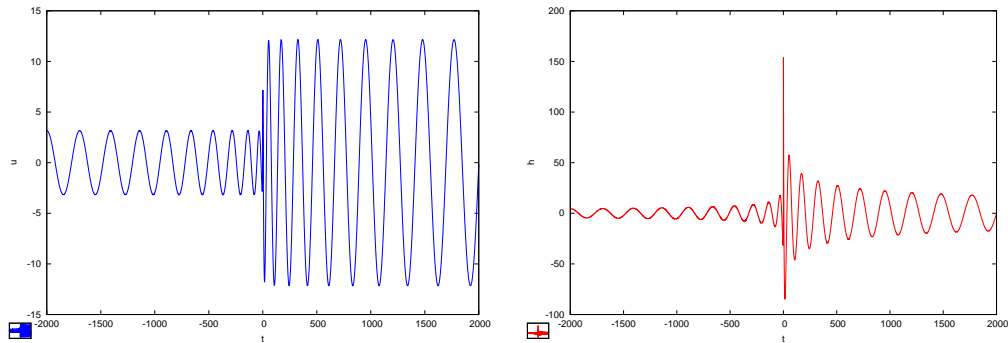
$$\frac{dt}{d\tau} = (A + Bt^2)^{1/6}. \quad (4.69)$$

Równania te pozwalają na numeryczną analizę zaburzeń tensorowych podczas fazy bounce'u. Ważną kwestią jest teraz zadanie odpowiednich warunków początkowych dla pola u . Możemy to zrobić przyjmując normalizację próżniową $u \sim 1/\sqrt{k}$ w stanie wejściowym. Na tej podstawie możemy wyznaczyć rozwiązania powyższego układu równań. Na Rys. 4.7 przedstawiono ewolucję numeryczną czynnika skali. Na lewym



Rysunek 4.7: Ewolucja czynnika skali.

panelu Rys. 4.8 przedstawiono ewolucję pola u . Jak widać pole to ulega amplifikacji podczas fazy bounce'u. To samo obserwujemy dla pola h_i .

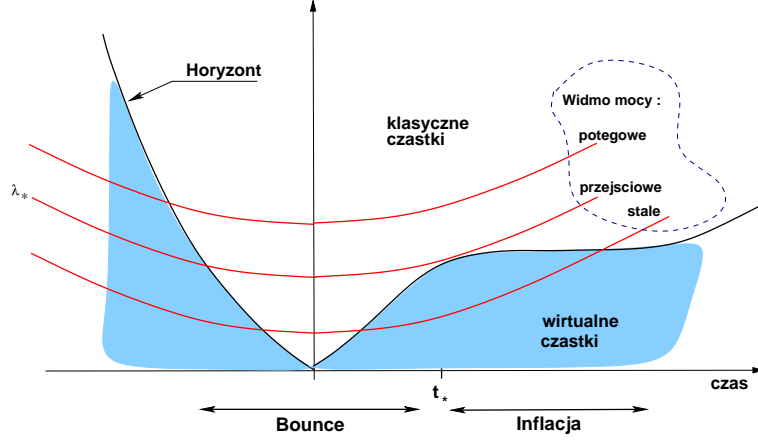


Rysunek 4.8: **Lewa** : Ewolucja funkcji u . **Prawa** : Ewolucja funkcji pola h .

Rozważany układ równań jest podstawą do numerycznego wyznaczania widma zaburzeń tensorowych. Rozważając jego rozwiązania oraz ewolucję horyzontu kosmologicznego możemy znaleźć momenty przecięcia kolejnych modów z horyzontem. To natomiast pozwoli na wyznaczenie wartości $\mathcal{P}_T(k)$ dla danej wartości k . Dalsza analiza tego modelu powinna więc zawierać numeryczne wyznaczenie widma mocy.

4.4.3 Bounce+Inflacja

W tym rozdziale rozważymy scenariusz, w którym po fazie bounce'u następuje faza inflacji. Ewolucję horyzontu w takim przypadku przedstawiono schematycznie na Rys. 4.9. Jak widać mody o długości fali $\lambda > \lambda_*$ będą pozostawać nad horyzontem



Rysunek 4.9: Ewolucja horyzontu w modelu Bounce+Inflacja.

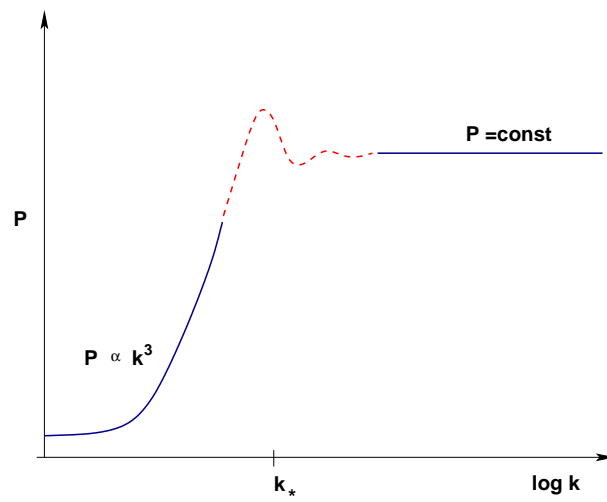
nawet podczas fazy inflacji. Wyjściowe widmo będzie więc odpowiadać temu z fazy pre-bounce'u w postaci

$$\mathcal{P}_T(k) \propto k^3, \quad k < k_*. \quad (4.70)$$

Mody o długości $\lambda < \lambda_*$ będą natomiast początkowo wchodzić nad horyzont, a następnie powtórnie wchodzić pod ulegając rozpadowi. Wtedy ponownie wchodzą nad horyzont w fazie inflacji produkując płaskie widmo zaburzeń

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{32}{\pi} \left(\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2, \quad k > k_*. \quad (4.71)$$

Otrzymane widmo będzie więc miało na wyjściu kształt zobrazony schematycznie na Rys. 4.10 Warto zauważyć, że podobny kształt widma będzie uzyskiwany także dla zaburzeń skalarnych. Charakterystyczne tłumienie modów niskoenergetycznych będzie natomiast przekładać się na tłumienie niskich multipoli w widmie Mikrofalowego Promieniowanie Tła (CMB). Efekt taki jest w rzeczywistości obserwowany [33]. Jego wyjaśnienie w ramach modelu inflacji zaproponowano w pracach [34, 35]. W modelu zaproponowanym w pracy [35] specyficzna ewolucja pola inflatonu prowadzi do przedinflacyjnej fazy kontrakcji. Wy tłumaczenie tłumienia niskich multipoli w widmie CMB opiera się więc także o kontrakcje horyzontu. Efekt tłumienia niskich multipoli był też tłumaczony w ramach LQC bazując na zmodyfikowanej dynamice pola inflatonu [36].



Rysunek 4.10: Schematyczny obraz widma mocy dla modelu Bounce+Inflacja.

5 Ograniczenia obserwacyjne

Nasze dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do określenia własności fal grawitacyjnych produkowanych podczas fazy kwantowego bounce’u. W niniejszym rozdziale przedstawimy możliwe metody badania kosmologicznych fal grawitacyjnych. Pokażemy w jaki sposób mogą być one użyte do testowania scenariusza kosmologicznego bounce’u.

5.1 Fale grawitacyjne a Mikrofalowe Promieniowanie Tła

Obserwowane fluktuacje Mikrofalowego Promieniowania Tła (CMB) na skalach $\gtrsim 1^\circ$ odpowiadają rozmiarom ponad horyzontalnym podczas rekombinacji. Zncy to, że pozostawały one ponad horyzontem podczas procesu tworzenia się CMB i nie są wynikiem oscylacji w pierwotnej plazmie. Niosą one tym samym informację o pierwotnych zaburzeniach, które przetrwały “zamrożone” na skalach super-horyzontalnych. Zaburzenia te poprzez efekt Sachs-Wolfa prowadzą do obserwowanych fluktuacji temperatury

$$\frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} = \frac{1}{3}\Phi(\mathbf{x}_{LS}), \quad (5.1)$$

gdzie Φ jest potencjałem Bardeena perturbacji skalarnych. Stąd widmo CMB dla niskich multipoli $l < 100$ ma postać

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \frac{1}{9} \langle |\Phi|^2 \rangle k^3 j_l^2(k(\tau_0 - \tau_{LS})). \quad (5.2)$$

Podobny efekt zachodzi dla zaburzeń tensorowych. Wkład od fal grawitacyjnych jest jednak generalnie znacznie słabszy i nie da się go odróżnić na tym poziomie od wkładu danego przez perturbacje skalarne. Obserwacje niskich multipoli dają jednak bezpośredni wgląd na kształt pierwotnego widma. W szczególności jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, niskoenergetyczne widmo z fazy bounce’u zachowuje się jak $\mathcal{P} \propto k^3$. Taka postać widma prowadzi do tłumienia niskich multipoli w widmie CMB. Efekt taki jest w rzeczywistości obserwowany [33]. Istnieje też wiele modeli próbujących go wytłumaczyć w ramach modelu infacji [34, 35]. Modele takie wyma-

gają jednak szczególnej dynamiki pola inflatonu. Model bounce'u może dać proste wytłumaczenie tego efektu. Kwestia ta jest obecnie w trakcie badań mających dać ilościowe przewidywania efektów bounce'u w widmie fluktuacji CMB.

5.1.1 Widmo polaryzacji CMB

Podczas formowania się widma CMB fotony ulegały rozpraszaniu na swobodnych elektronach, zwanym rozpraszaniem Thomsona. Przekrój czynny na ten typ rozpraszania dany jest przez

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\hat{e}' \cdot \hat{e}|^2. \quad (5.3)$$

Wektory \hat{e} oraz \hat{e}' to odpowiednio stany polaryzacji fotonu przed i po rozproszeniu. Łatwo dojść do wniosku że rozpraszanie thompsonowskie może prowadzić do polaryzacji promieniowania pierwotnie niespolaryzowanego. Polaryzacja taka może pojawiać się jeśli rozpraszaniu ulegają fotony termiczne w ośrodku niejednorodnym. Niejednorodności są natomiast wynikiem fluktuacji skalarnych i tensorowych przestrzeni.

Rozróżnia się dwa typy polaryzacji CMB, tak zwaną polaryzację typu E oraz polaryzację typu B. Ciekawą własnością jest to, że polaryzacja typu E jest wynikiem zarówno fluktuacji skalarnych jak i tensorowych, natomiast polaryzacja typu B jest wynikiem tylko zaburzeń tensorowych. Obserwacje polaryzacji typu B mogą być więc doskonałym narzędziem do badania pierwotnych fal grawitacyjnych.

Widmo polaryzacji typu B dane jest przez [37]

$$C_l^{BB} = (4\pi)^2 \int_0^\infty k k^2 \mathcal{P}_T(k) \left| \int_{\tau_{LS}}^{\tau_0} d\tau g(\tau) h_k(\tau) \left[2j_l''(x) + \frac{4j_l(x)}{x} \right] \right|^2, \quad (5.4)$$

gdzie $x = k(\tau_0 - \tau)$. Ponadto funkcje widzialności definiuje się jako

$$g(\tau) = \dot{\kappa} e^{-\kappa}, \quad (5.5)$$

gdzie

$$\dot{\kappa} = a n_e x_e \sigma_T. \quad (5.6)$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$a \quad - \quad \text{czynniki skali znormalizowany do jedności na redshift } z = 0, \quad (5.7)$$

$$n_e \quad - \quad \text{gęstość elektronów}, \quad (5.8)$$

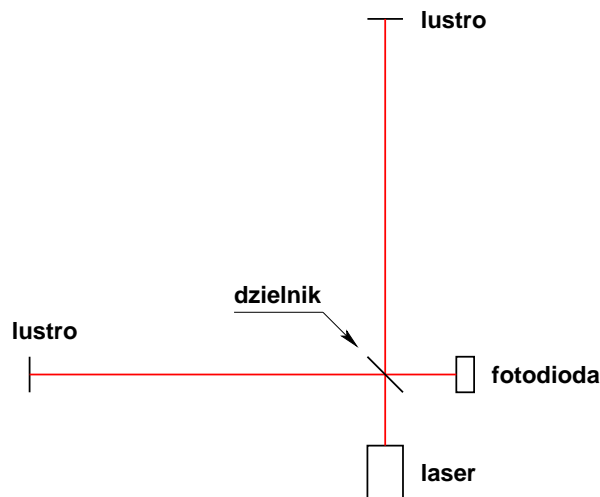
$$x_e \quad - \quad \text{stopień jonizacji}, \quad (5.9)$$

$$\sigma_T \quad - \quad \text{przekrój czynny Thomsona}. \quad (5.10)$$

Jak dotąd widmo polaryzacji B nie zostało zaobserwowane. Oczekuje się jednak, że będzie to możliwe dzięki obserwacjom satelity Planck, której wystrzelenie planowane jest na jesień 2008 roku. Satelita ten oprócz pomiarów polarymetrycznych wykona dokładniejsze pomiary widma fluktuacji temperatury. Szczególnie interesujące będą pomiary niskich multipoli. Więcej na temat misji Plancka można znaleźć w [38].

5.2 Interferometry grawitacyjne

Interferometry grawitacyjne dają metodę bezpośredniej detekcji fal grawitacyjnych. Schemat prostego interferometru grawitacyjnego typu Michelsona przedstawiono na Rys. 5.1. Jak widać jego głównymi elementami są dwa prostopadłe ramiona za-



Rysunek 5.1: Schemat interferometru grawitacyjnego.

kończone lustrami, laser, dzielnik wiązki laserowej oraz detektor światła w postaci fotodiody. Wiązka światła wysłana z lasera za pomocą dzielnika kierowana jest do dwóch ramion interferometru. Po odbiciu obie wiązki spotykają się na wyjściu ulegając interferencji. Sygnał ten jest rejestrowany przez fotodiody. Jeśli przez interferometr będzie przechodzić fala grawitacyjna będzie to skutkowało zmianie długości jego ramion. To zaś wpłynie na fazy wiązek na wyjściu i w rezultacie na wynik interferencji. Celem fotodiody jest zarejestrowanie tych wahań w natężeniu światła.

Istnieje obecnie szereg interferometrów grawitacyjnych tego typu. Oczywiście ich budowa optyczna jest bardziej skomplikowana niż ta przedstawiona na powyższym schemacie. W szczególności są nimi obserwatoria LIGO, VIRGO, GEO 600. Ponadto planowana jest budowa kosmicznego interferometru grawitacyjnego o nazwie LISA.

Wykotrzystując interferometr LIGO wyznaczono górne ograniczenie na wartość stochastycznego tła fal grawitacyjnych. Otrzymano [39]

$$\Omega_{\text{gw}} < 6.5 \times 10^{-5} \quad (5.11)$$

dla zakresu częstotliwości $f = 51 - 150$ Hz. Oczekuje się że w projekcie LISA osiągnie się czułość [40]

$$\Omega_{\text{gw}}(1\text{mHz}) \simeq 1 \times 10^{-12}. \quad (5.12)$$

Odnieśmy teraz te ograniczenia do wartości parametru Ω_{gw} uzyskanego w poprzednim rozdziale. Jak widać w modelach z inflacją częstość ν_{max} jest kilkanaście rzędów wielkości poniżej zakresu obserwacyjnego interferometrów grawitacyjnych. Bezpośrednia detekcja przy użyciu interferometrów jest więc w takim przypadku niemożliwa. Diametralnie zmienia się to jednak gdy rozważymy model bez fazy infacji. Wtedy widmo fal grawitacyjnych z fazy bounce'u może bez trudu przekroczyć obecny próg detekcji. Fakt nie obserwowania kosmologicznych fal grawitacyjnych jest więc pośrednim argumentem za istnieniem fazy inflacji, przy założeniu istnienia fazy bounce'u.

5.3 Fale grawitacyjne a pierwotna nukleosynteza

Fale grawitacyjne na skalach sub-horyzontalnych zachowują się jak promieniowanie z równaniem stanu

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (5.13)$$

Jest to przeciwieństwo skal ponad-horyzontalnych dla których fale grawitacyjne pozostają "zamrożone". Energia fal grawitacyjnych, jeśli jest wystarczająco duża, może zauważalnie wpływać na ewolucję kosmologiczną. W szczególności czuła na obecność fal grawitacyjnych jest faza pierwotnej nukleosyntezy (BBN). Mianowicie dodatkowy wkład do gęstości energii powoduje przyśpieszenie ewolucji i szybsze chłodzenie wszechświata. Wpływać to będzie na długość pierwotnej nukleosyntezy a w rezultacie na abundancję najlżejszych pierwiastków. Bazując więc na obserwacjach astronomicznych abundancji pierwiastków we Wszechświecie możemy uzyskać ograniczenia na wkład od dodatkowych form energii (jak fale grawitacyjne) podczas fazy BBN.

Podczas fazy promieniowania gęstość energii wyraża się jako

$$\rho \equiv g_* \left(\frac{\pi^2}{30} \right) T^4 \quad (5.14)$$

gdzie g_* to efektywna liczba relatywistycznych stopni swobody

$$g_* = \sum g_{\text{bozony}} + \frac{7}{8} \sum g_{\text{fermiony}}. \quad (5.15)$$

Przed odprężnięciem się neutrino wkład do tej sumy dają fotony (2), elektrony (2), pozytony (2) oraz $N_\nu = 3$ rodziny neutrino oraz antyneutrino ($2N_\nu$) co daje razem

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} (4 + 2N_\nu) = \frac{43}{4} = 10.75. \quad (5.16)$$

Wkład od dodatkowych stopni swobody, które mogą być zarówno fermionowe jak i bozonowe, wprowadzamy przez efektywną liczbę typów neutrino, mianowicie

$$N_{\text{eff}} = N_\nu + \Delta N_{\text{eff}}. \quad (5.17)$$

Gęstość energii dodatkowego składnika ρ_x wynosi więc

$$\rho_x = \frac{7}{8} 2 \Delta N_{\text{eff}} \left(\frac{\pi^2}{30} \right) T^4 = \frac{7}{8} \Delta N_{\text{eff}} \rho_\gamma \quad (5.18)$$

gdzie ρ_γ to gęstość energii promieniowania ($g_* = 2$). Dostajemy stąd warunek

$$\int_{f_1}^{f_2} d \ln f \Omega_{\text{gw}}(f) \leq \frac{\frac{7}{8} 2 \Delta N_{\text{eff}}}{2 + \frac{7}{8} (4 + 2N_\nu)} \frac{\rho_\gamma}{\rho_c}, \quad (5.19)$$

gdzie:

- f_1 - częstość odpowiadająca skalom Hubble'a podczas BBN, przyjmująca wartość $f_1 \sim 10^{-10}$ Hz,
- f_2 - górne obcięcie częstości, przyjmujemy $f_2 = f_{\text{Pl}} = 1.48 \times 10^{43}$ Hz.

Wykorzystując więc obserwacyjny $N_{\text{eff}} - 3 < 1.4$ [41] ostatecznie otrzymujemy ograniczenie

$$\int_{f_1}^{f_2} d \ln f \Omega_{\text{gw}}(f) \leq 1.5 \times 10^{-5}. \quad (5.20)$$

5.4 Timing pulsarów

Obserwacje pulsarów dają cenne ograniczenie na obecność tła fal grawitacyjnych. Mianowicie wykorzystuje się w tym celu milisekundowe pulsary o niezwykle stabilnym

okresie pulsów. Obserwowana zmiana okresu oscylacji dla takich pulsarów wynosi

$$\frac{\Delta t}{t} \approx \frac{\mu \text{ sekundy}}{8 \text{ lat}} < 10^{-14}. \quad (5.21)$$

Jeśli przez linię łączącą obserwatora z pulsarem będzie przechodzić fala grawitacyjna, będzie ona miała wpływ na okres pulsów. W szczególności jeśli obserwacje wykonuje się w przedziale czasu t będą one szczególnie czułe na fale grawitacyjne o długości $\lambda \simeq ct$. Bazując na ośmioletnich obserwacjach milisekundowych pulsarów uzyskano ograniczenie [42]

$$h^2 \Omega_{\text{gw}}(f = 1/(8 \text{ lat})) \leq 2.0 \times 10^{-8} \quad (5.22)$$

gdzie $f = 1/(8\text{lat}) = 3.96 \times 10^{-9}$ Hz.

6 Podsumowanie

W niniejszej pracy badaliśmy produkcję fal grawitacyjnych podczas epoki kwantowego bounce'u. Faza ta pojawia się w Pętłowej Kosmologii Kwantowej, zastępując stan osobliwości początkowej. Efekty kwantowej grawitacji nie prowadzą jednak tylko do modyfikacji samej dynamiki wszechświata. Mają one też wpływ na samą propagację fal grawitacyjnych. Efekty te da się opisać w ramach modyfikacji klasycznego równania na mody tensorowe. Wprowadzają one mianowicie efektywną masę grawitonu, która znika wraz z oddalaniem się od fazy bounce'u. Efekty te, jak pokazaliśmy da się jednak traktować perturbacyjnie. Nie mniej jednak prowadzą one do tłumienia produkcji fal grawitacyjnych podczas bounce'u.

Bazując na obserwacji że efekty dynamiki wszechświata są mocniejsze niż efekty modyfikacji propagacji, skonstruowaliśmy uproszczony model produkcji fal grawitacyjnych podczas bounce'u. Mianowicie zaniedbaliśmy poprawki do propagacji, rozważając klasyczne równanie na mody tensorowe oraz przyjęliśmy pewną specyficzną postać fluidu wypełniającego wszechświat. Pozwolilo nam to na rozwiązanie modelu w sposób ściśle analityczny. W oparciu o ten model wyznaczyliśmy widmo wyprodukowanych fal grawitacyjnych. Wartość otrzymanego widma dążyła do zera dla modów niskoenergetycznych. Wyznaczyliśmy też wartość parametru $\Omega_{\text{gw}}(\nu)$ charakteryzującego dzisiejszą gęstość tła grawitonów z fazy bounce'u. Wartość ta w modelu z inflacją okazała się o wiele rzędów wielkości poza dzisiejszymi możliwościami obserwacyjnymi. Jednakże w modelach bez fazy inflacji wartość ta wzrasta osiagając i przewyższając obecny próg obserwacyjny. Bazując na tej obserwacji możemy więc wnioskować za istnieniem inflacji. Staje się ona niezbędna do stłumienia fal grawitacyjnych produkowanych w fazie kwantowego bounce'u. Policzaliśmy także niskoenergetyczną część widma fal grawitacyjnych produkowanych w modelu ze swobodnym polem skalarnym, zazwyczaj rozważanym w ramach Pętłowej Kosmologii Kwantowej. Uzyskaliśmy dla tego modelu $\mathcal{P}_T(k) \propto k^3$ dla małych wartości k . Jest to zgodne z wcześniejszym modelem analitycznym, w którym też dostaliśmy tłumienie widma do zera dla $k \rightarrow 0$. Wynik ten więc jednoznacznie wskazuje na tłumienie dla $k \rightarrow 0$ co nie jest dostawane w modelach inflacyjnych, w których $\mathcal{P}_T(k) = \text{const}$. Warto zaznaczyć, że rozważania te odnoszą się także do zaburzeń skalarnych. Obecność bounce'u prowadzi więc

do tłumienia niskich multipoli w widmie Mikrofalowego Promieniowania Tła (CMB). Przyczynę do tego efektu dany jest zarówno przez fale grawitacyjne jak i fluktuacje skalarne. Tłumienie niskich multipoli w widmie CMB obserwuje się w rzeczywistości. Obserwacje wyższych multipoli wskazują jednak na stałość pierwotnego widma zaburzeń, tak jak przewiduje teoria inflacji. Bazując na tych dwóch faktach zaproponowaliśmy scenariusz, w którym po fazie bounce’u następuje faza inflacji. Scenariusz taki prowadzi do jakościowego wytłumaczenia obserwowanych cech widma CMB. Aby zbadać ten efekt ilościowo niezbędna jest dalsza analiza numeryczna. W tym celu napisaliśmy wstępny program do badania numerycznej ewolucji fal grawitacyjnych. Jest on podstawą do konstrukcji programu liczącego numerycznie widmo fal grawitacyjnych. Ta kwestia jest obecnie o fazie badań.

Patrząc w przyszłość spodziewamy się więc możliwości testowania Kwantowej Kosmologii Kwantowej dzięki nowym i dokładniejszym pomiarom widma CMB. W szczególności obserwacje polaryzacji B widma CMB dzięki satelicie Planck dobrze rokują badaniom fal grawitacyjnych o kosmologicznym pochodzeniu. Ponadto dokładniejsze obserwacje niskich multipoli w widmie CMB dadzą nam potencjalnie możliwość weryfikacji modeli Pętlowej Kosmologii Kwantowej. Do tego potrzebne nam są także dalsze i dokładniejsze przewidywania efektów obserwacyjnych.

7 Dodatki

7.1 Tożsamość Abela

Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \quad (7.1)$$

którego dwoma niezależnymi rozwiązaniami są $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$, więc

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + P(x)\frac{dy_1}{dx} + Q(x)y_1 = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} + P(x)\frac{dy_2}{dx} + Q(x)y_2 = 0. \quad (7.3)$$

Biorąc $y_1 \times (7.3)$ minus $y_2 \times (7.2)$ dostajemy

$$\begin{aligned} y_1 \left(\frac{d^2y_2}{dx^2} + P(x)\frac{dy_2}{dx} + Q(x)y_2 \right) - y_2 \left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + P(x)\frac{dy_1}{dx} + Q(x)y_1 \right) &= 0 \\ \left(y_1 \frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2y_1}{dx^2} \right) + P(x) \left(y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right) + Q(x) (y_1y_2 - y_2y_1) &= 0 \\ \left(y_1 \frac{d^2y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2y_1}{dx^2} \right) + P(x) \left(y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Definiując

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 \quad (7.5)$$

dostajemy

$$\begin{aligned} W' &= (y_1'y_2' + y_1y_2'') - (y_1'y_2' + y_1''y_2) \\ &= y_1y_2'' - y_1''y_2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Wstawiając (7.5) oraz (7.6) do (7.4) dostajemy równanie

$$W' + PW = 0 \quad (7.7)$$

którego rozwiązaniem jest

$$W(x) = W_0 \exp - \int P(x) dx. \quad (7.8)$$

W przypadku równania Bessela

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (7.9)$$

niezależnymi rozwiązaniami są funkcje $J_n(x)$ oraz $Y_n(x)$. Odczytując z równania (7.9)

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad (7.10)$$

i wstawiając do (7.8) dostajemy

$$W = J_n(x) \frac{dY_n(x)}{dx} - \frac{dJ_n(x)}{dx} Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x}. \quad (7.11)$$

7.2 Wrońskian w teorii pola

Rozważmy kanonicznie sprzężone zmienne

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{k} \left[f(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + f^*(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right], \quad (7.12)$$

$$\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{k} \left[g(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + g^*(k, \tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (7.13)$$

spełniające regułę komutacji $[\hat{u}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Ponadto operatory kreacji i anihilacji spełniają $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ oraz $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger] = 0$. Powyższe reguły komutacji narzucają warunki na postać funkcji f oraz g . Wstawiając do komutatora $[\hat{u}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x})]$ wyrażenia (7.12) oraz (7.13) dostajemy

$$\begin{aligned} [\hat{u}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{q} d^3 \mathbf{k} [fg(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}} - \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}} \\ &+ fg^*(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}} \\ &+ f^*g(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} - \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}} \\ &+ f^*g^*(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}}]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Wykorzystując relacje komutacji dla operatorów kreacji i anihilacji dostajemy

$$\begin{aligned}
 [\hat{u}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{k} [fg^* \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} - f^*g \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}] \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} [fg^* e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - f^*g e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}] \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} (f^*g - fg^*) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Biorąc

$$W := f^*g - fg^* = -i \tag{7.16}$$

dostajemy

$$[\hat{u}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{y})] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{7.17}$$

7.3 Normalizacja rozwiązań z funkcjami Bessela

Rozważmy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f(k, \tau) + \left[k^2 - \frac{a''}{a} \right] f(k, \tau) = 0, \tag{7.18}$$

gdzie ewolucja czynnika skali dana jest w ogólnej postaci

$$a(\tau) = \left(-\frac{1}{H_0\tau} \right)^\beta. \tag{7.19}$$

Jak widać, w przypadku $\beta = 1$ odzyskujemy w szczególności ewolucję de Sittera. Rozwiązanie równania (7.18) przybiera postać

$$f(k, \tau) = \sqrt{-\tau} [C_1 J_\mu(-\tau k) + C_2 Y_\mu(-\tau k)], \tag{7.20}$$

gdzie

$$\mu = \beta + \frac{1}{2}. \tag{7.21}$$

Wykorzystajmy teraz warunek Wrońskiego

$$W = f^*(k, \tau) \frac{d}{d\tau} f(k, \tau) - f(k, \tau) \frac{d}{d\tau} f^*(k, \tau) = -i \tag{7.22}$$

do znormalizowania otrzymanych rozwiązań. Dostajemy

$$f^* \frac{d}{d\tau} f = \frac{1}{2\tau} |f|^2 + \frac{x}{\tau} \sqrt{-\tau} \left(C_1 \frac{dJ_\mu}{dx} + C_2 \frac{dY_\mu}{dx} \right) f^* \quad (7.23)$$

oraz

$$f \frac{d}{d\tau} f^* = \frac{1}{2\tau} |f|^2 + \frac{x}{\tau} \sqrt{-\tau} \left(C_1^* \frac{dJ_\mu}{dx} + C_2^* \frac{dY_\mu}{dx} \right) f, \quad (7.24)$$

gdzie wprowadziliśmy $x = -k\tau$. Stąd wyliczamy Wrońskian

$$\begin{aligned} W &= -x \left(C_1 \frac{dJ_\mu}{dx} + C_2 \frac{dY_\mu}{dx} \right) (C_1^* J_\mu + C_2^* Y_\mu) \\ &+ x \left(C_1^* \frac{dJ_\mu}{dx} + C_2^* \frac{dY_\mu}{dx} \right) (C_1 J_\mu + C_2 Y_\mu) \\ &= -x (C_1^* C_2 - C_1 C_2^*) \left(J_\mu \frac{dY_\mu}{dx} - \frac{dJ_\mu}{dx} Y_\mu \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Wykorzystując torzsamość Abela (7.11)

$$J_\mu(x) \frac{dY_\mu(x)}{dx} - \frac{dJ_\mu(x)}{dx} Y_\mu(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x}, \quad (7.26)$$

dostajemy

$$W = - (C_1^* C_2 - C_1 C_2^*) \frac{2}{\pi} = -i, \quad (7.27)$$

czyli

$$C_1^* C_2 - C_1 C_2^* = i \frac{\pi}{2}. \quad (7.28)$$

Wprowadźmy teraz parametry D_1 i D_2 przez relacje

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} (D_1 + D_2), \\ C_2 &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} (D_1 - D_2) i. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Stąd

$$\begin{aligned} C_1^* C_2 &= i \frac{\pi}{4} (|D_1|^2 - |D_2|^2 + D_1 D_2^* - D_2 D_1^*), \\ C_1 C_2^* &= -i \frac{\pi}{4} (|D_1|^2 - |D_2|^2 + D_1^* D_2 - D_2^* D_1), \end{aligned}$$

co wstawiając do tożsamości (7.28) daje

$$C_1^* C_2 - C_1 C_2^* = i \frac{\pi}{4} (|D_1|^2 - |D_2|^2) 2 = i \frac{\pi}{2}. \quad (7.30)$$

Stąd dostajemy warunek

$$|D_1|^2 - |D_2|^2 = 1. \quad (7.31)$$

Podando korzystając z definicji funkcji Hankela

$$H_\mu^{(1)}(x) = J_\mu(x) + iY_\mu(x), \quad (7.32)$$

$$H_\mu^{(2)}(x) = J_\mu(x) - iY_\mu(x), \quad (7.33)$$

możemy rozwiązanie (7.20) zapisać w postaci

$$f(k, \tau) = \sqrt{-\tau} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left[D_1 H_\mu^{(1)}(-\tau k) + D_2 H_\mu^{(2)}(-\tau k) \right]. \quad (7.34)$$

Rozważmy teraz granice wysokoenergetyczną tego rozwiązania, mianowicie $x \gg 1$. Pozwoli to nam na zinterpretowanie otrzymanych obu typów rozwiązań. Dla $x \gg 1$ obowiązują relacje

$$J_\mu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (7.35)$$

$$Y_\mu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (7.36)$$

na podstawie których dostajemy

$$H_\mu^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[ix - i\mu\pi/2 - i\pi/4], \quad (7.37)$$

$$H_\mu^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[-ix + i\mu\pi/2 + i\pi/4]. \quad (7.38)$$

Widać, że rozwiązania pierwszego typu opowiadają modom adwansowanym, $f \propto e^{-ik\tau}$. Rozwiązania drugiego typu opowiadają natomiast modom retardowanym, $f \propto e^{ik\tau}$. Najczęściej fizycznie uzasadnione jest wybieranie rozwiązań adwansowanych, czyli biorąc $D_1 = e^{i\alpha}$ oraz $D_2 = 0$ gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Tłumaczy to dlatego wykonaliśmy transformacje do tych zmiennych. Stałą α ustalamy ze zgodności z funkcją modów w przestrzeni Minkowskiego. Mianowicie w przestrzeni Minkowskiego funkcja modów przybiera znaną postać

$$f(k, \tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (7.39)$$

Odpowiadać to będzie rozważanej granicy wysokoenergetycznej dla której rozwiązania adwansowane przyjmują postać

$$f(k, \tau) \rightarrow \sqrt{-\tau} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{i\alpha} \sqrt{\frac{2}{-\pi k \tau}} e^{-ik\tau - i\mu\pi/2 - i\pi/4} = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} e^{i\alpha - i\mu\pi/2 - i\pi/4}, \quad (7.40)$$

stąd

$$\alpha = \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}. \quad (7.41)$$

Bibliografia

- [1] G. Amelino-Camelia, Lect. Notes Phys. **669**, 59 (2005), arXiv:gr-qc/0412136.
- [2] G. Amelino-Camelia, C. Lammerzahl, A. Macias, and H. Muller, AIP Conf. Proc. **758**, 30 (2005), arXiv:gr-qc/0501053.
- [3] M. Bojowald, Living Rev. Rel. **8**, 11 (2005), arXiv:gr-qc/0601085.
- [4] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quant. Grav. **21**, R53 (2004), arXiv:gr-qc/0404018.
- [5] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **86**, 5227 (2001), arXiv:gr-qc/0102069.
- [6] A. Ashtekar, T. Pawlowski, and P. Singh, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006), arXiv:gr-qc/0602086.
- [7] J. Mielczarek and M. Szydlowski, Phys. Lett. B **657**, 20 (2007), arXiv:0705.4449.
- [8] J. Mielczarek and M. Szydlowski, (2007), arXiv:0710.2742.
- [9] A. Bojowald and G. M. Hossain, Phys. Rev. D **77**, 023508 (2008), arXiv:0709.2365.
- [10] A. Barrau and J. Grain, (2008), arXiv:0805.0356.
- [11] L. P. Grishchuk, Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975).
- [12] B. Allen, (1996), arXiv:gr-qc/960403.
- [13] A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [14] A. Ashtekar, Phys. Rev. D **36**, 1587 (1987).
- [15] L. Smolin, (2002), arXiv:hep-th/0209079.
- [16] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [17] H. Nicolai and K. Peeters, Lect. Notes Phys. **271**, 151 (2007), arXiv:hep-th/0601129.

- [18] A. Perez, (2004), arXiv:gr-qc/0409061.
- [19] H. Nicolai, K. Peeters, and M. Zamaklar, *Class. Quant. Grav.* **22**, R193 (2005), arXiv:hep-th/0501114.
- [20] L. Smolin, (2004), arXiv:hep-th/0408048.
- [21] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998), arXiv:gr-qc/9710007.
- [22] L. Modesto, *Phys. Rev. D* **70**, 124009 (2004), arXiv:gr-qc/0407097.
- [23] A. Ashtekar, M. Bojowald, and J. Lewandowski, *dv. Theor. Math. Phys.* **7**, 233 (2003), arXiv:gr-qc/0304074.
- [24] A. Ashtekar, *Nuovo Cim.* **122B**, 135 (2007), arXiv:gr-qc/0702030.
- [25] C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **442**, 753 (1995), arXiv:gr-qc/9411005.
- [26] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* **14**, A55 (1997), arXiv:gr-qc/9602046.
- [27] M. Bojowald, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 1771 (2006), arXiv:gr-qc/0609034.
- [28] J. Mielczarek and M. Szydlowski, Emerging singularities in the bouncing loop cosmology, 2008, arXiv:0801.1073 [gr-qc].
- [29] O. Hrycyna, J. Mielczarek, and M. Szydlowski, (2008), arXiv:0804.2778 [gr-qc].
- [30] P. Singh, K. Vandersloot, and G. V. Vereshchagin, *Phys. Rev.* **D74**, 043510 (2006), arXiv:gr-qc/0606032.
- [31] J. Mielczarek, T. Stachowiak, and M. Szydlowski, Exact solutions for Big Bounce in loop quantum cosmology, 2008, arXiv:0801.0502 [gr-qc].
- [32] K. A. Meissner, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5245 (2004), arXiv:gr-qc/0407052.
- [33] A. Shafieloo and T. Souradeep, *Phys. Rev. D* **70**, 043523 (2004), arXiv:astro-ph/0312174.
- [34] C. Contaldi, M. Peloso, L. Kofman, and A. Linde, *JCAP* **0307**, 002 (2003), arXiv:astro-ph/0303636.
- [35] Y. Piao, B. Feng, and X. Zhang, *Phys. Rev. D* **69**, 103520 (2004), arXiv:hep-th/0310206.

- [36] S. Tsujikawa, P. Singh, and R. Maartens, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5767 (2004), arXiv:astro-ph/0311015.
- [37] U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2054 (1997), arXiv:astro-ph/9609169.
- [38] P. Collaboration, (2006), arXiv:astro-ph/0604069.
- [39] A. Abbott and *et al.* [LIGO Collaboration], *Astrophys. J.* **659**, 918 (2007), arXiv:astro-ph/0608606.
- [40] M. Maggiore, **2000**, arXiv:gr-qc/0008027.
- [41] R. Cyburt, B. Fields, and K. Olive, *Astropart. Phys.* **17**, 87 (2002), arXiv:astro-ph/0105397.
- [42] F. A. J. *et al.*, *Astrophys. J.* **653**, 1571 (2006), arXiv:astro-ph/0609013.